UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

DISEÑO DE TAREAS SOBRE LÍMITE DE FUNCIONES A PARTIR DE LA MODIFICACIÓN DE PROBLEMAS PLANTEADOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA

POR

ANA NODELIA VILLANUEVA CARRASCO

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en educación matemática

Profesora guía: Dra. Elizabeth Hernández Arredondo

Profesor co – guía: Dr. Gonzalo Rivera

Osorno, sur de Chile. Abril de 2022

© 2022, Ana Nodelia Villanueva Carrasco

© 2022, Ana Nodelia Villanueva Carrasco

Se autoriza la reproducción y/o divulgación total o parcial, con fines académicos, mediante cualquier forma, procedimiento y/o tecnología de la presente obra, incluyendo la cita bibliográfica que reconoce la obra y a su autor/ autora.”

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DISEÑO DE TAREAS SOBRE LÍMITE DE FUNCIONES A PARTIR DE LA MODIFICACIÓN DE PROBLEMAS PLANTEADOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA

Tesis de Magíster presentada por ***Ana Nodelia Villanueva Carrasco*** dentro del Programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, dirigida por la Dra. Elizabeth Hernández Arredondo, académica de la Universidad de Los Lagos y codirigida por el Dr. Gonzalo Rivera, académico de la Universidad de Los Lagos.

Ana Nodelia Villanueva Carrasco

Dra. Elizabeth Hernández Arredondo

Dr. Gonzalo Rivera

Dedico esta investigación a:

Mi Mamá Luisa, para usted por cuidarme siempre, sobre todo en mis primeros años donde las preocupaciones no formaban parte de la vida, sino que todo eran juegos y risas, a pesar de nuestra gran diferencia de edad, me comprendió y con todo el cariño de una abuela construyó los cimientos de quien soy hoy en día.

A mis queridos, amorosos, y comprometidos padres, Carlos y Arcelia se merecen todo mi admiración y cariño, ya que, con su ejemplo, me han enseñado a ser una persona honrada, responsable, cariñosa y alegre, además me han incentivado a superarme cada día y me han apoyado en cada una de las decisiones que he tomado.

A mi querido hermano Rodrigo, por el apoyo brindado, las palabras de aliento cada vez que te comentaba algún nuevo logro realizado en este proceso y los momentos de distensión tan necesarios compartidos junto a tu familia.

A mi compañero de vida Fabián, por apoyarme incondicionalmente en cada etapa de este proceso, desde la rendición de la prueba de ingreso, hasta el día en que escribo estas palabras y por convertirte en un pilar fundamental en esta etapa de mi vida al recordarme constantemente que es tan importante disfrutar el camino como lograr el objetivo.

A mi tío Horacio, por el apoyo y comentarios entregados en cada pequeño logro de esta etapa que compartí con usted.

A mi abuela Marlene, aunque la distancia nos separe, siempre he sentido su apoyo en los diferentes proyectos que he ido emprendiendo hasta este momento.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, doy gracias a Dios, quien en su infinita bondad y amor cuidó de mi familia y me otorgó salud, constancia y determinación para lograr mis objetivos, permitiéndome llegar hasta este punto.

Al programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos por brindarme tan buena experiencia y a cada docente que fue parte de este proceso integral de formación.

A mi directora de tesis Doctora Elizabeth Hernández Arredondo por apoyarme cada día, animarme en cada etapa del proceso e incentivarme a participar de simposios y congresos, entregándome las herramientas necesarias para que las experiencias sean enriquecedoras para mí.

A mi co-director de Tesis, Doctor Gonzalo Rivera, por colaborar en la elaboración de esta investigación con su atención al detalle y su disposición para trabajar cada vez que lo necesité.

A mis compañeros del Magíster a quienes, a pesar de no conocer presencialmente, siento muy cercanos y considero que sus opiniones, consejos, sugerencias y preguntas, contribuyeron robustecer los fundamentos de esta investigación.

A los directivos de mi trabajo, Colegio Proyección Siglo XXI por la comprensión y los permisos otorgados cuando fueron necesarios para participar en congresos o finalizar este proceso.

A mis colegas del Colegio Proyección Siglo XXI, por brindarme su apoyo incondicional cada vez que lo necesité.

Finalmente, agradezco a quien lee este apartado y más de mi tesis, por permitir que mis experiencias, investigaciones y conocimientos contribuyan, aunque sea con un granito de arena, a futuros proyectos.

Esta investigación contó con el apoyo financiero de la Universidad de Los Lagos, por medio de la beca excelencia académica rebaja del 50% de financiamiento del arancel del programa de magister en educación matemática.

Además de ser desarrollada en el seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática de la Universidad de Los Lagos (GIDMAT-ULAGOS), e inscrita a la línea de investigación "Formación de profesores de matemáticas". Siendo una de las acciones del Proyecto Fondecyt 1200005, titulado "Desarrollo de competencias profesionales clave para la práctica pedagógica de profesores de matemáticas de enseñanza media", y cuyo investigador responsable es el Dr. Luis Pino-Fan.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES E IMÁGENES

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

CI	: Criterios de Idoneidad.
CCDM	: Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas.
CDM	: Conocimiento Didáctico-Matemático.
CPEIP	: Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas.
EOS	: Enfoque Ontosemiótico.
Estándares	: Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.
ICME	: International Congress on Mathematical Education (Congreso Internacional de educación matemática).
ICMI	: The International Commission on Mathematics Instruction (La comisión internacional de enseñanza de las matemáticas).
MBE	: Marco para la buena enseñanza.
Mineduc	: Ministerio de Educación de Chile.
MKT	: Mathematical Knowledge for Teaching (Conocimiento Matemático para la Enseñanza).
NISS	: New ICMI Study Series (Nueva serie de estudios ICMI).
PMA	: Pensamiento Matemático Avanzado.
PME	: Psychology of Mathematics Education (Psicología de la Educación Matemática).
THA	: Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.
UNLPam	: Universidad Nacional de La Pampa.
TIC	: Tecnologías de la Información y la Comunicación.
A1	: Actividad 1, Unidad 2 límite, Programa de límites, derivadas e integrales.
A2	: Actividad 2, Unidad 2 límite, Programa de límites, derivadas e integrales.
A3	: Actividad 3, Unidad 2 límite, Programa de límites, derivadas e integrales.
A4	: Actividad 4, Unidad 2 límite, Programa de límites, derivadas e integrales.

RESUMEN

La presente investigación se encuentra inscrita en la línea del postgrado formación de profesores de matemática, utiliza el Enfoque Ontosemiótico y dos constructos de este, el Conocimiento Didáctico Matemático, y los Criterios de Idoneidad.

En este trabajo se analiza el rediseño de los problemas sobre el concepto de límite de funciones planteados por profesores en formación de quinto año pertenecientes a Pedagogía en Matemática y Computación en la Universidad de Los Lagos.

El objetivo a estudiar es el tipo de relaciones que se establecen entre los criterios emergentes en el rediseño de problemas sobre límites de funciones en libros de texto y el conocimiento didáctico matemático que moviliza el profesor.

Se empleó una metodología cualitativa, descriptiva e interpretativa, apoyada en un diseño de carácter fenomenológico, recolectando los datos a través de actividades guiadas, grupos de discusión y entrevistas.

El análisis de la información fue realizado mediante una inducción analítica, efectuando una codificación apoyada en un análisis de contenido.

En los resultados obtenidos se identificaron tres niveles en el rediseño de los profesores en formación, los que van desde un rediseño a *profundidad*, pasando por un rediseño *moderado* hasta un rediseño de carácter *incipiente*.

En el rediseño a *profundidad* se consideran todas las facetas de los criterios de idoneidad: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica, con énfasis en lo interaccional y emocional, en los rediseños moderados se hacen explícitas las facetas: epistémica, emocional y mediacional, mientras que los incipientes se encuentran solo las facetas epistémica y cognitiva.

Los resultados entregan indicios que mientras mayor sea el número de creencias que posea el profesor en formación sobre cómo debe enseñarse la matemática, el rediseño generado tendrá un mayor énfasis en ese punto y si el profesor no ha hecho estas reflexiones, el rediseño se encontrará situado únicamente en lo cognitivo y epistémico.

Palabras claves: Diseño de tareas, Límite de funciones, Formación de profesores

ABSTRACT

The present research which is part of the postgraduate mathematics teacher training programme, by using the Onto semiotic Approach and two of its constructs, Didactic Mathematical Knowledge and the Suitability Criteria.

In this document analyses the redesign of problems on the concept of limit of a function posed by fifth-year trainee teachers of Mathematics and Computer Science the Universidad de Los Lagos.

The Objective to study is type of relationships that are established between the emerging criteria in the redesign of problems about limits of a function in textbooks and the mathematical didactic knowledge mobilised by the teacher.

The methodology used was qualitative, descriptive and interpretative, supported by a phenomenological design; the data collection was carried out through guided activities, discussion groups and interviews. The analysis of the information was carried out by means of an analytical induction, carrying out a codification supported by a content analysis.

The results obtained identified three levels in the redesign of trainee teachers, ranging from an *in-depth* redesign, through a *moderate* redesign to an *incipient* redesign. In *in-depth* redesign, all facets were considered: epistemic, cognitive, interactional, mediational, emotional and ecological with emphasis on the interactional and emotional facets of the Suitability Criteria, while *incipient* redesign is found only in the epistemic and cognitive facets of the Suitability Criteria.

The results indicate that the greater the number of beliefs that the trainee teacher has about how mathematics should be taught, the redesign generated will have a greater emphasis on that point, and if the teacher has not carried out these reflections, the redesign will be located only in the cognitive and epistemic aspects.

Key words: Task design, Limits of a function, Teacher training

INTRODUCCIÓN

Los profesores de matemática poseen diferentes competencias para lograr el proceso de enseñanza-aprendizaje, entre ellas tener un profundo conocimiento disciplinar y didáctico, en particular en este último aspecto se resalta la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, por ejemplo, proponer situaciones problema que resulten ricas y desafiantes matemáticamente que, se apoyen en el cambio de registros de representación, pero este aspecto se revela como una deuda histórica, tanto en la formación de profesores, como en la misma investigación, es decir, los programas de formación de profesores de matemática no dedican espacio para promover el diseño de situaciones problema o tareas, aspecto que en la educación matemática es un campo incipiente de investigación. Sobre este aspecto, en el currículo chileno se identifica un conflicto potencial en la formación de los profesores de matemáticas, pues al menos en los últimos 10 años, estos tuvieron su primer acercamiento al Cálculo (límites, derivadas e integrales, entre otros) en su formación universitaria, ya que no era parte obligatoria de su currículum en enseñanza media.

Así que estos profesores en formación han tenido su primer acercamiento con el cálculo y sus fenómenos (variación y covariación), a partir de un análisis y aprendizaje de forma abstracta y teórica. Sin embargo, en algún momento deberán gestionar estos saberes con estudiantes de tercero o cuarto año de educación media. El proceso para realizar la trasposición didáctica: de la teoría a la matemática a enseñar, depende de ¿cómo ellos se apropiaron de estos conceptos relativos al límite de funciones?, y que requieren de un pensamiento matemático avanzado en su formación universitaria, para ello hay que realizar modificaciones y así lograr transferir estos saberes, para llevarlos al nivel de comprensión de sus estudiantes, esto genera la base de la presente investigación.

En este estudio se asume que el profesor usa los libros de texto como un referente principal para desarrollar sus actividades de aula; y por ello, es de interés investigar las características que tienen los rediseños y observar los criterios emergentes que usan estos profesores cuando requieren enseñar nociones sobre límites de funciones, con el fin de establecer una clasificación de estos, vincularlos con los Criterios de Idoneidad (CI), y con el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que moviliza el profesor.

En el capítulo 1, se genera un breve recorrido por algunas de los resultados de investigaciones que abordan las temáticas antes mencionadas, es decir: 1) las investigaciones que abarcan el diseño de tareas, considerando los exponentes principales, las aproximaciones dadas a este tema en los planes y programas del Ministerio de Educación de Chile y los instrumentos entregados por el Mineduc para llevar a buen término el aprendizaje en este Diferenciado como: las jornadas de difusión de las bases curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media, las capacitaciones del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) sobre el diferenciado de límite, derivadas e integrales y la implementación de la plataforma llamada Aula 360 que incluía capacitar a los docentes en ejercicio cada 15 días; 2) Las investigaciones que abordan el concepto de límite de una función, considerando sus aspectos epistemológicos, las dificultades en su comprensión y los acercamientos didácticos que han ocurrido para enseñar este concepto; para finalizar con aquellas que tocan los dos puntos anteriores 3) Las investigaciones sobre diseño de tareas en el concepto de límite de funciones.

En el capítulo 2, se muestra la problemática de la investigación considerando resultados de tres áreas: 1) La competencia del profesor de matemática, relacionando la visión del Mineduc con las investigaciones vigentes; 2) El diseño de tareas como parte de la labor docente y 3) Un análisis histórico y curricular del concepto límite de funciones, considerando, su identificación en las investigaciones actuales, el análisis curricular del concepto límite de funciones y la relación entre los significados del mismo; 4) la justificación de problemática de investigación para llegar a plantear la pregunta de investigación y los objetivos que se abordan en la misma.

En el capítulo 3, se da a conocer el marco teórico comenzando con una breve introducción donde se muestran algunos conceptos clave en la presente investigación como: 1) la evolución histórica del conocimiento didáctico matemático del profesor y 2) Los criterios de idoneidad por faceta y los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad por faceta.

En el capítulo 4, se describe la metodología cualitativa utilizada en la investigación donde se realiza un estudio de casos múltiples realizando la recolección de datos mediante la solicitud a un grupo de 10 profesores en formación de la Universidad de Los Lagos que cursaban su último año, de un rediseño de una de las actividades propuestas por el Programa de Límites, Derivadas e Integrales, diseñado por el ministerio de educación y un análisis de contenido de una serie de videograbaciones de: 1) El análisis crítico de una planificación de una clase de este diferenciado realizada por una profesora en ejercicio; 2) La presentación de su propuesta de rediseño y 3) Las respuestas a una entrevista semiestructurada sobre sus rediseños.

En el capítulo 5 se presenta el análisis de resultados, que ha sido dividido en tres tipos de rediseños implementados por los profesores en formación, a saber: 1) Un rediseño a *profundidad*, 2) Un rediseño *Moderado* y 3) un rediseño *Incipiente*.

En el capítulo 6, se encuentra una síntesis de los resultados obtenidos, las respuestas a los objetivos de investigación, las reflexiones finales del impacto de este trabajo, la formación inicial docente, las conclusiones y líneas de trabajo emergentes.

1. ANTECEDENTES

En este capítulo se presentan algunos resultados de investigaciones que buscan mostrar los elementos necesarios para levantar nuestra problemática de investigación, a saber, 1) investigaciones que exploran el diseño de tareas, 2) investigaciones que exploran el desarrollo del PMA y el objeto matemático límite de una función, 3) las convergencias de estas investigaciones.

1.1 Investigaciones sobre diseño de tareas

1.1.1 Exponentes principales del diseño de tareas

Actualmente, muchas investigaciones se han interesado por estudiar la forma en que se realiza el diseño de tareas, ha repercutido de tal forma que, en 2011, The International Commission on Mathematics Instruction (ICMI), aceptó dedicar el ICMI 22 (Whatson y Ohtani, 2015) a este tema.

La Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) tiene como objetivo mejorar los estándares de enseñanza en todo el mundo, a través de programas, talleres e iniciativas y publicaciones, para ello trabaja con los países en desarrollo, buscando aumentar los niveles de enseñanza y la educación que pueden mejorar la calidad de vida y ayudar al país.

La Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) organiza y auspicia cada cuatro años el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) donde se analiza el desarrollo de la educación matemática en todo el mundo.

Cada estudio del ICMI aborda un tema de particular importancia en la educación matemática contemporánea, y lo lleva a cabo un equipo internacional de académicos y profesionales destacados en ese campo. Luego, se invita a los mejores profesionales contribuyentes de todo el mundo a una conferencia/taller internacional cuidadosamente planificado y estructurado. Más allá de la interacción productiva y las colaboraciones ocasionadas por este evento, el producto principal es un volumen de estudio, que se publica en la New ICMI Study Series (NISS) por la editorial Springer.

El diseño de tareas es considerado importante desde varias perspectivas en la investigación y la práctica de educación matemática.

> Desde una perspectiva cognitiva, el detalle y el contenido de las tareas tienen un efecto significativo en el aprendizaje; desde una perspectiva cultural, las tareas conforman la experiencia de los alumnos con la asignatura y su comprensión de la naturaleza de la actividad matemática; desde una perspectiva práctica, las tareas son la base de la vida en el aula, las cosas que hay que hacer (ICMI Study, 2015, p.3).

El diseño de tareas ha surgido vinculado con el desarrollo de la educación matemática, ya en PME de 1979, 2 de los 24 trabajos presentados se centraban en este tema, sus autores eran: Claude Janvier y Alan Bell.

Janvier indico que el aprendizaje por descubrimiento había motivado la importancia de la "noción de entornos de aprendizaje apropiados y en la idea de situaciones ricas susceptibles de provocar descubrimientos o de encapsular ideas abstractas ricas" (1979, p. 135).

Alan Bell argumentó que el aprendizaje se desarrolla a partir de diferentes enfoques de enseñanza con varias unidades curriculares, sus métodos incluían "la personificación, los enfoques de descubrimiento guiado y el conflicto cognitivo" (Bell, 1979, p. 5).

Mientras, Müller y Wittmann (1984) señalaron que las tareas debían presentar ciertas características como: los objetivos, los materiales, los problemas matemáticos que surgen del contexto de la unidad y el trasfondo matemático o psicológico, de la misma. Consideraba que una unidad didáctica es más que un plan elaborado para una serie de lecciones, si no que representa una idea para un enfoque didáctico que deja abiertas varias formas de realizar la unidad.

Brown (1992) difundió los experimentos de diseño argumentando que, con ellos, se puede observar la actividad real de las aulas y beneficiarse de la experiencia de los profesionales.

En 1993 se publicó un número especial de Educational Studies in Mathematics, donde Alan Bell expuso que las prácticas docentes que incorporan el diseño de los materiales de enseñanza seguirán siendo tema de estudio en las próximas décadas. Además, indica que los principios psicológicos de aprendizaje que sustentan esta teoría del diseño de la enseñanza incluyen la conectividad, la transferencia estructural entre contextos, la retroalimentación, la reflexión y la revisión, y la intensidad.

Autoras como Sierpinska (1994) mencionan que el principal problema para los profesores de matemáticas es cómo facilitar a sus alumnos la comprensión de las matemáticas que se enseñan, para ella es necesario combinar los elementos de: matemática, filosofía, lógica, lingüística y psicología de la educación matemática.

Cobb et al., (2003) indica que el papel que desempeña la teoría en los experimentos de diseño es una característica central de los mismos.

Van Merriënboer, Clark y de Croock, (2002), desarrollaron un modelo de diseño que consta de 4 partes: (1) Tareas de aprendizaje ordenadas y que promueven la construcción de esquemas, junto con tareas orientadas a las reglas para los aspectos rutinarios, (2) información que permita relacionar los conocimientos nuevos y previos, (3) información de prerrequisitos de uso inmediato, y (4) práctica de tareas parciales. En este modelo se distinguen 2 métodos: 1) de indagación (solicitar a los estudiantes que presenten un ejemplo o contraejemplo conocido para una idea particular) y 2) el método expositivo (el instructor da a conocer un ejemplo o contraejemplo conocido y familiar para una idea concreta) concluyendo que para conectar la información nueva con la previa los métodos de indagación son más apropiados, ya que, se basan en los conocimientos que poseen los estudiantes, aunque requieren más tiempo para su aplicación.

En 2005, en la conferencia de PME, se dedicó un foro de investigación al diseño de tareas, cuyo tema fue: la importancia del diseño de tareas en la educación matemática, donde, Gravemeijer, Van Galen y Keijzer (2005) postulan que en educación matemática el diseño de la instrucción hace referencia a una serie de tareas que permite al profesor la adaptación de las mismas, a las habilidades e intereses de los estudiantes, manteniendo los objetivos originales.

Cobb & Gravemeijer, (2008), destacan que los

> Productos de los experimentos de diseño suelen incluir secuencias de actividades y recursos asociados para apoyar una forma particular de aprendizaje, junto con una teoría instructiva específica del dominio que

> sustenta las secuencias instructivas y constituye su fundamento; una teoría instructiva específica del dominio consiste en un proceso de aprendizaje fundamentado que culmina con el logro de objetivos de aprendizaje significativos, así como los medios demostrados para apoyar ese proceso de aprendizaje (p. 77).

A continuación, se presentan algunas investigaciones sobre diseño de actividades. Ruthven et al., (2009) indican que las teorías son tanto un recurso (proporcionan herramientas y principios teóricos para apoyar el diseño de una secuencia de enseñanza) como un producto de la investigación de diseño (informan de los procesos de aprendizaje y de los medios que han demostrado apoyar ese aprendizaje). Además, elaboraron la distinción entre el diseño como intención (centra la atención en el proceso por el que una secuencia diseñada se integra en el entorno del aula y posteriormente se perfecciona de forma progresiva) y el diseño como implementación (aborda específicamente la formulación inicial del diseño).

Otra forma de realizar el diseño de tareas es el plateado en The Lesson Study, que tiene sus inicios en Japón con Fernández y Yoshida, (2004), pero que ha tenido muchas variantes a lo largo de los años tales como: Lesson Study en China (Huang y Bao, 2006; Yang y Ricks, 2013), así como en otros países (Hart, Alston, y Murata, 2011). En la versión que se impartió en China, el papel del experto en el desarrollo y refinamiento de un plan de lección es de importancia crítica (Ding, Jones y Pepin, 2013), llegando a definir como sabiduría acumulada de la práctica a una compleja combinación de conocimientos considerables sobre didáctica de las matemáticas y teorías generales del aprendizaje y de los estudiantes (Ding, Jones, Pepin y Sikko, 2014).

Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2013) investigaron de qué manera, el diseño basado en principios es eficaz para promover una cultura de resolución de problemas, el razonamiento matemático y el aprendizaje conceptual, articulando dos componentes de diseño: uno para la tarea y otro para el entorno de aprendizaje. Esta investigación se basó en los siguientes 5 principios: 1) Fomentar la producción de múltiples soluciones (Levav-Waynberg y Leikin, 2009), 2) Crear situaciones de colaboración (Arcavi, Kessel, Meira y Smith, 1998), 3) Participar en conflictos socio cognitivos (Limón, 2001), 4) Proporcionar herramientas para comprobar las hipótesis (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2001), 5) Invitar a los alumnos a reflexionar sobre las soluciones (Pólya, 1945).

Komatsu y Tsujiyama (2013) señalan que, dado que "no es realista esperar que solo el planteamiento de los problemas diseñados facilite las actividades de los estudiantes y el aprendizaje matemático, el diseño de tareas implica no solo la selección o el desarrollo de problemas, sino también la orientación instructiva de los profesores relacionada con los problemas" (p. 472).

Stephan y Akyuz (2013) crearon e implementaron una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), según Simón y Tzur (2004) una THA consiste en: los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que usarán para promover el aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Stephan y Akyuz (2013) se basaron en las investigaciones anteriores sobre el aprendizaje y las operaciones con números enteros, el diseño de su secuencia de instrucción utilizó 3 heurísticas, que son: 1) Reinvención guiada (con ayuda de un profesor, el diseñador imagina la ruta de aprendizaje de la clase), 2) Las secuencias son reales para los estudiantes (las tareas se basan en situaciones realistas para los estudiantes) y 3) Modelos emergentes (las actividades deben lograr que los estudiantes transiten de lo informal a lo formal).

Koichu et al., (2013) crea un estudio que valora delinear un espacio de variación para el objeto de aprendizaje previsto, eliminando o excluyendo los factores de experiencia que obstaculizan. Esto se hace para dirigir la atención del alumno a ciertos aspectos que constituyen la característica definitoria del concepto (diseño de tareas de desarrollo de conceptos).

Aizikovitsh-Udi, Clarke y Kuntze (2013), proponen la idea de una "tarea híbrida" que estimula diferentes formas de pensamiento a través de una única tarea: el pensamiento específico de la disciplina estadística y formas más genéricas de pensamiento de orden superior, como el pensamiento crítico (diseño de tareas basado en la competencia).

Movshovitz-Hadar y Edri (2013) llevaron a cabo un estudio multifacético para investigar las posibilidades de combinar valores sociales y personales como la equidad, la tolerancia, la justicia social, la racionalidad y el logro y alcanzar el propio potencial intelectual, todo ello dentro de un enfoque diseñado para el aprendizaje de las matemáticas.

Maldonado et al., (2015) presentan una clasificación de las tareas en aquellas para: 1) particularizar y generalizar, 2) proponer un objeto matemático y 3) formular preguntas para identificar un objeto matemático, indicando que las tareas que requieren considerar similitudes y diferencias entre objetos matemáticos tienen un gran potencial para lograr un aprendizaje efectivo en matemáticas.

Pochulu et al., (2016) da a conocer que las secuencias de tareas realizadas por los docentes formadores de futuros profesores influyen en cómo estos, incorporan el análisis didáctico a su práctica, evidenciando que las secuencias implementadas por los profesores en formación eran coherentes con las orientaciones curriculares dadas en su formación.

Según lo revisado anteriormente podemos observar que el diseño de tareas ha sido considerado parte de la educación matemática y se ha desarrollado en conjunto con esta, partiendo con los entornos de aprendizaje de Janvier y la personificación, el descubrimiento guiado y el conflicto cognitivo de Bell, para que más adelante Wittmann le añadiera como características el objetivo, los materiales y los problemas, unos años después Brown difundió los experimentos de diseño para observar la actividad real en las aulas y en 1993 Bell argumentó que la práctica docente que incorpora el diseño de los materiales de enseñanza, seguirá siendo tema de estudio en las próximas décadas, lo que se ha cumplido a cabalidad.

Llegado a este punto, algunas investigaciones buscaron combinar los elementos de las matemáticas, la filosofía, la lógica, la lingüística y la psicología de la educación matemática para lograr facilitar la compresión de los estudiantes (Sierpinska, 1994); otras se centraron en los experimentos de diseño (Van Merriënboer et al., 2002; Cobb et al., 2003; Gravemeijer, et al., 2005; Cobb y Gravemeijer, 2008; Ruthven et al., 2009), otras en desarrollo y refinamiento de un plan de lección denominado The Lesson Study (Fernández y Yoshida, 2004; Huang y Bao 2006; Yang y Ricks, 2013, Hart, et al., 2011, Ding, Jones y Pepin, 2013) y otras buscaban articular el diseño de la tarea con el entorno de aprendizaje (Prusak et al., 2013).

En este momento se plantea que el diseño de tareas implica la orientación instructiva de los profesores relacionada con los problemas (Komatsu y Tsujiyama, 2013), en el mismo año que: Stephan y Akyuz crean e implementan una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA); Koichu et al., (2013) diseñan tareas mediante el desarrollo de conceptos; Aizikovitsh-Udi et al., (2013) diseñan tareas basadas en la competencia; Movshovitz-Hadar y Edri (2013) combinan valores sociales y personales alcanzar el propio potencial intelectual.

En 2015 Maldonado et al., clasificaron las tareas considerando similitudes y diferencias entre objetos matemáticos y en 2016 Pochulu menciona que las secuencias implementadas por los profesores en formación eran coherentes con las orientaciones curriculares dadas en su formación.

El diseño de tareas inicialmente estaba centrado en dar a conocer un modelo para que el profesor diseñara buenos problemas, más adelante los investigadores del área se dieron cuenta de que no solamente se requiere tener buenos problemas, sino que el profesor sea capaz de planificar y organizar estos problemas al contexto en que se encuentran sus estudiantes para lograr un aprendizaje significativo de todos y además motivar su proceso de enseñanza aprendizaje.

En este punto, se puede mencionar que, en el diseño de tareas falta investigar cómo el profesor realiza la gestión de los problemas en su clase, para lograr que esta tenga una buena calidad matemática, este punto no se ha abordado aún debido a que hasta el momento las investigaciones se han centrado en cómo serían los problemas ideales y cuál es la riqueza matemática necesaria para la clase, pero falta investigar cómo se podría desarrollar esta gestión el profesor.

Lo mencionado por Pochulu, es decir, que las secuencias implementadas por los profesores en formación eran coherentes con las orientaciones curriculares dadas en su formación, se relaciona con los requerimientos que deben cumplir los docentes en ejercicio, esto se encuentra establecido en el marco para la buena enseñanza, que refleja un esfuerzo que ha efectuado el Ministerio de Educación de Chile, donde el profesor necesita cumplir con 4 dimensiones: 1) preparación de la enseñanza, 2) creación de un ambiente propicio para el aprendizaje, 3) enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes y 4) responsabilidades profesionales, en la dimensión preparación para la enseñanza, se plantea que el diseño de tareas es considerado parte de la labor docente, a pesar de que en la mayor parte de los programas de formación inicial docente, no se encuentra incorporado de forma explícita en su malla curricular. Aquí la investigación busca en un futuro ser un aporte a la formación inicial docente y en lo inmediato a los profesores en formación que participaron en la investigación.

1.1.2 Aproximaciones al diseño de tareas en planes y programas del Mineduc

El Ministerio de Educación de Chile (Mineduc), se encuentra preocupado porque los profesores en ejercicio logren adaptar las actividades propuestas en los planes y programas de estudio al contexto de sus estudiantes, por esto, fomenta el desarrollo de la habilidad de diseño de tareas, a través de diversos mecanismos como: entregando la versión digital y física de las bases curriculares por nivel; jornada de difusión de las bases curriculares de 3° y 4° año de educación media; capacitación del CPEIP sobre el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales; plataforma y capacitaciones del Aula 360 explicados a continuación (Mineduc, 2020).

El Mineduc entrega indicaciones a los docentes para llevar a buen término las lecciones impartidas y lograr que todos los estudiantes logren cumplir los objetivos de aprendizajes, desarrollar las habilidades y actitudes estipuladas en los planes y programa de estudio, para ello le propone al docente una organización de las lecciones pretendidas con relación al tiempo disponible dentro del año escolar, entregando una orientación de como secuenciar y combinar los objetivos para lograr una comprensión profunda y transversal, la que puede ser adaptada por los docentes, de acuerdo al contexto de sus estudiantes (Mineduc, 2020).

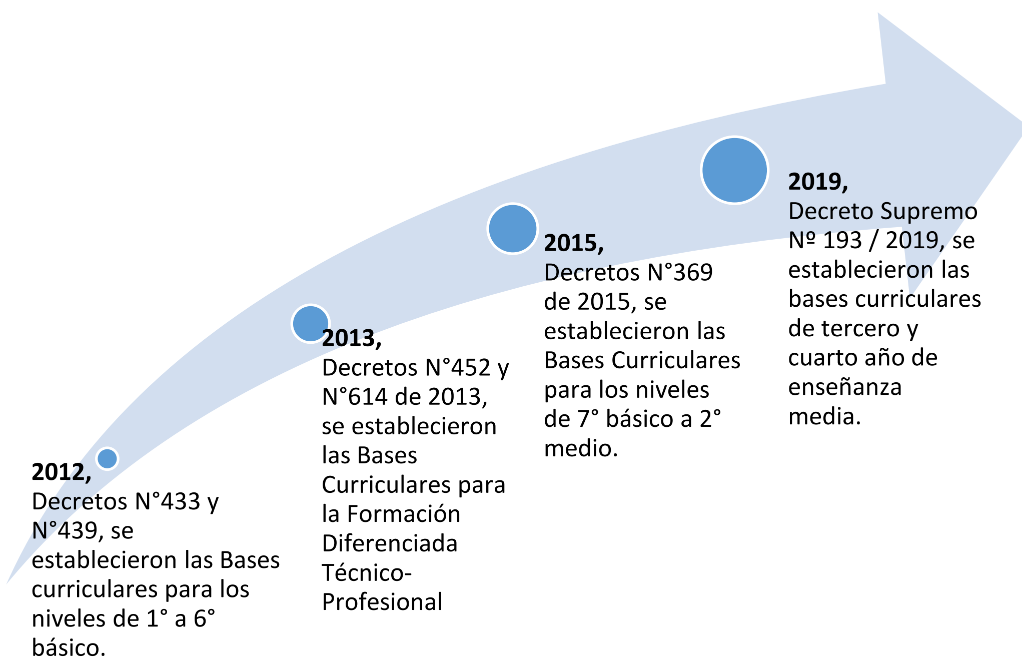


***Figura 1 - 1**: Bases curriculares vigentes, decretos y año de publicación*.

La última modificación a las bases curriculares de tercero y cuarto año de enseñanza media vigentes fueron parte de un plan de mejoramiento continuo, como se observa en la Figura 1, que comenzó el año 2012 con los niveles de 1° a 6° básico, continuando el 2013 con la formación diferenciada técnico-profesional, avanzando el 2015 a los niveles de 7° a 2° medio y finalizando el 2019 con las de 3° y 4° año de enseñanza media. En estas bases curriculares se establece que el currículum de Chile está fundado en el principio de equidad del sistema educativo de acuerdo a la Ley General de Educación (Ley N.º 20370, 2010) que promueve que todos los estudiantes tengan las mismas oportunidades de recibir una educación de calidad. Esto se materializa ofreciendo iguales oportunidades de profundización, flexibilidad y electividad a los estudiantes de todas las modalidades (Humanístico-Científica, Técnico-Profesional y Artística) con el fin de potenciar sus propios intereses.

En estas bases curriculares existe un Plan Común de Formación General (ciencias para la ciudadanía, educación ciudadana, filosofía, inglés, lengua y literatura, matemática) compartido por las tres modalidades y un Plan Común de Formación General Electivo, dentro del cual los estudiantes pueden cursar asignaturas que el establecimiento desee potenciar de acuerdo a sus necesidades y proyecto educativo. Además, cada modalidad cuenta con un plan propio en el cual los estudiantes pueden optar por especializaciones (en el caso de Técnico-Profesional y Artística) o asignaturas de profundización (en el caso de Humanístico-Científica) en función de sus intereses particulares (Mineduc, 2019).

El Plan de Formación Diferenciada Humanístico-Científica ofrece un conjunto de asignaturas que permiten a los estudiantes explorar y profundizar en áreas de su interés. Estas asignaturas de profundización se organizan en torno a las disciplinas que conforman el Plan de Formación General y abordan elementos disciplinares, conceptuales y epistemológicos específicos (Mineduc, 2019).

En las bases curriculares de tercero y cuarto año de enseñanza media (Mineduc, 2019) se explica la estructura del sistema de electividad para la implementación del Plan de Formación Diferenciada Humanístico-Científica, de acuerdo con los siguientes criterios:

1) Cada establecimiento deberá ofrecer un mínimo de seis asignaturas de profundización en cada nivel, de un total de 27 alternativas, resguardando que la oferta de asignaturas considere los intereses de los estudiantes.

2) Los estudiantes deberán elegir tres asignaturas de profundización por nivel, con una duración semanal de seis horas cada una.

3) La oferta de asignaturas de profundización deberá garantizar que, al menos, dos de las siguientes tres áreas sean cubiertas:

Área A: Lengua y Literatura, Filosofía, Historia, Geografía y Ciencias Sociales

Área B: Matemática, Ciencias

Área C: Artes, Educación Física y Salud

Con lo mencionado anteriormente se explicita que el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales no se imparte en todos los colegios, ya sea porque los intereses de sus estudiantes están en otras áreas o porque dentro de la oferta del mismo se priorizan otras asignaturas del área de matemáticas o ciencias.

En cada nivel de aprendizaje, en sus bases curriculares que organizan los tiempos de aprendizaje de todas las asignaturas, además en el área de matemática, existe el Programa de estudio, que se encuentra complementado con los textos de estudio, clasificados en; la guía didáctica del docente, el texto de estudio del estudiante y el cuaderno de ejercicios del estudiante.

En el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales solo existe el Programa de estudio, es decir, el Mineduc no entrega otros libros de texto que apoyen la labor docente en la enseñanza de este contenido, por esta razón, el docente en ejercicio debe recurrir a textos complementarios para adaptar las actividades propuestas por el Mineduc al contexto de sus estudiantes y lograr así un aprendizaje significativo de los objetivos propuestos. Estos textos complementarios no siempre están disponibles en las bibliotecas del colegio donde el docente se desempeña, debiendo recurrir a otras fuentes para lograr adaptar este contenido de la forma en que todos sus estudiantes logren comprenderlo.

Este Programa de estudio fue publicado en el verano del año 2020 y como los Diferenciados debían ser impartidos ese mismo año, el Mineduc ofreció capacitaciones para los docentes denominadas jornadas de difusión para la implementación de las bases curriculares 3° y 4° medio.

1.1.2.1 Jornada de difusión de las bases curriculares de 3° y 4° año de educación media

El Mineduc en el verano de 2020, luego de dar a conocer el programa del Diferenciado Límites, Derivadas e Integrales, implementó cursos de capacitación para los profesores en ejercicio, con el objetivo de presentar de que se trataban las nuevas bases curriculares, debido a que su publicación se realizó de forma tardía en septiembre de 2019. Además de redimirse por la demora en la publicación, la realización de estas jornadas plantea la hipótesis que el Mineduc está consciente que los profesores en ejercicio en Chile, no tienen desarrollada la habilidad de diseño de tareas en el contenido de límite de funciones, la que les permitiría adaptar la propuesta para lograr el aprendizaje de todos los estudiantes.

El Mineduc espera que los profesores modifiquen los objetivos y contenidos propuestos para contextualizarlos a la realidad de sus estudiantes, al hacer la revisión del material entregado y las capacitaciones ofrecidas a los docentes ejercicio en el Diferenciado de Límite, Derivadas e Integrales, se considera que no son suficientes para lograr una adaptación que propicie el aprendizaje de todos los estudiantes, por lo anterior surge la necesidad de que en la formación inicial docente se incorpore el desarrollo de la habilidad de diseño de tareas. Las tareas están basadas en la resolución de problemas y diversos estudios han demostrado que los estudiantes para profesor de matemáticas tienen dificultades para plantear problemas o que sus habilidades para plantear problemas no son suficientes y deben ser trabajadas para mejorarse (Akbaba Dağ & Kılıç Şahin, 2019; Doğan-Coşkun, 2019; Ellerton, 2013; Gökkurt et al., 2015; Kar , 2014 Işık & Kar, 2012b; Kar e Işık, 2014; Öçal et al., 2018; Örnek & Soylu, 2017; Özgen et al., 2017; Tertemiz y Sulak, 2013; Tichá & Hošpesová, 2009; Turhan Türkkan, 2018; Van Harpen & Presmeg, 2015; Zehir, 2013).

Las jornadas de difusión para la implementación de las bases curriculares 3° y 4° medio, se realizaron de forma regional y estaban destinadas a los profesores que impartirán los

Diferenciados durante ese año. Para participar de las capacitaciones, los profesores en ejercicio debían postular en la plataforma del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) y los sostenedores de los colegios debían validar que los docentes estuvieran ejerciendo en sus colegios durante ese año, mediante formularios que se adjuntaban a la postulación, en el caso de la Región de Los Lagos la capacitación se hizo en Puerto Montt desde el 08 al 10 de enero del 2020.

En esta Jornada se informó a los docentes asistentes, agrupados por área: los antecedentes de las nuevas bases curriculares para 3° y 4° medio; las habilidades y actitudes para el siglo XXI; el aprendizaje basado en proyectos; el plan común y diferenciado, dando a conocer el proceso de implementación que cada colegio debía efectuar para llevarlo a cabo según los parámetros establecidos.

Finalmente, se hizo un recorrido por las actividades propuestas por el Mineduc en cada Diferenciado, al momento de la capacitación estaban disponibles los programas de dos de los diferenciados del área de matemática, estos eran; Geometría 3D y Pensamiento Computacional, estando pendientes los programas de los diferenciados: Límites, Derivadas e Integrales; Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Por el tiempo de duración de la capacitación y la gran cantidad de aspectos considerados en la misma, no se logró la profundidad deseada por los docentes asistentes, lo que fue manifestado por los mismos en la jornada de cierre, los docentes a cargo de las capacitaciones aseguraron que durante el año 2020 se harían otras instancias de capacitación para apoyar la implementación de las nuevas bases curriculares, situación que producto de la pandemia no fue posible realizar de forma presencial. La primera capacitación en el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales se llevó a cabo de manera virtual en la plataforma del CPEIP desde diciembre de 2020 hasta mayo de 2021, con un receso en los meses de enero y febrero.

1.1.2.2 Capacitación del CPEIP sobre el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales

Otro esfuerzo que realizó el Mineduc, fue ofrecer una capacitación a través del CPEIP, a fines del 2020, con el objetivo de asegurar que los profesores en ejercicio tengan los conocimientos necesarios para lograr implementar este diferenciado, en el caso de los profesores con mayor experiencia se buscaba que recuerden este contenido con el que no habían trabajado desde sus años como estudiantes universitarios y en el caso de los profesores recién egresados buscaba lograr que puedan adaptar lo visto a una forma en que sus estudiantes lo logren comprender. Este diferenciado tiene por objetivo que los estudiantes que ingresen a la universidad provenientes de colegios particulares subvencionados y municipales tengan las mismas competencias que aquellos provenientes de establecimientos particulares, logrando así una menor deserción en los primeros años de estudios superiores y que más estudiantes finalicen sus carreras en los tiempos destinados para ello (Mineduc, 2019).

En la capacitación realizada durante fines del 2020 y comienzos del 2021 se buscaba abordar todo el contenido del Programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales (funciones, límites, derivadas e integrales) de manera práctica, recordando los conceptos claves para su enseñanza, como aplicarlos y adaptarlos para que los estudiantes a quienes les imparten clase, logren entenderlos. Además, se aborda como incorporar la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto, a través de plataformas como GeoGebra, Symbolab y Wólfram Alpha, sin que se produzca un abuso de estos recursos por parte de los estudiantes, es decir, que los utilicen para complementar su aprendizaje, a través de actividades planificadas con ese fin, que promuevan un aprendizaje significativo del contenido estudiado utilizando la tecnología disponible.

La capacitación se centró en la comprensión de los conceptos y la resolución de actividades diseñadas por los profesores a cargo de la misma, pero no se trabajó en la adaptación de las tareas a las realidades de los estudiantes, quedando nuevamente el trabajo de diseño de tareas a cargo del profesor en ejercicio sin el apoyo necesario para llevarlo a cabo.

Desde el punto de vista de los contenidos trabajados en las capacitaciones, el apartado sobre límite de funciones se enmarca en la fase mencionada por Tall, donde se establece una distinción entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, es decir, consideran que son diferentes los resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo, considerando que las definiciones formales son aquellas convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado, en cambio, las definiciones personales son aquellas utilizadas por los individuos como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal.

Desde el punto de vista del EOS, en la capacitación del CPEIP se abordan las facetas: ecológica al trabajar con los contenidos estipulados en el currículo buscando que los estudiantes se inserten de mejor forma en su etapa universitaria; mediacional al emplear las tecnologías disponibles para enseñar el concepto de límite de funciones; pero la epistémica, emocional e interaccional no se abordan debido a que la misma se centra en que los docentes entiendan o recuerden los conceptos en lugar de trabajar las posibles adaptaciones de las actividades que les resultaría motivadora a los futuros alumnos; debido a los tiempos de las sesiones y la gran cantidad de contenidos a abordar tampoco se aborda la cognitiva, ya que no se dan a conocer las posibles formas de evaluar el aprendizaje de los futuros estudiantes.

1.1.2.3 Plataforma y capacitaciones del Aula 360

Este año 2021, con el objetivo de apoyar a los docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido presente en el Diferenciado, se implementó una plataforma virtual, otro indicador de que el Mineduc está consciente que se necesita apoyar a los profesores en la enseñanza de sus estudiantes en este contenido. Esta plataforma cuenta con capacitaciones a los docentes participantes cada 15 días con un tutor que busca solucionar dudas en el uso de la plataforma y sobre la implementación del Programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales.

En abril de 2021 el Mineduc, a través del CPEIP, creó el Aula 360, una plataforma digital interactiva para estudiantes y docentes de 3º y 4º medio con recursos alineados a los programas de estudio de distintas asignaturas, con el propósito de apoyar el trabajo de los docentes en los diferenciados existentes en las nuevas bases curriculares vigentes desde el 2020.

Para utilizar la plataforma se informó en abril de 2021 a los sostenedores y directivos de los colegios que la plataforma comenzaría a funcionar a partir de mayo del mismo año, ellos debían inscribir a los docentes que impartieran los diferenciados y comprometerse a que estos docentes utilizarían la plataforma y participarían de las capacitaciones periódicas con un tutor cada 15 días durante el año escolar 2021.

Del área de matemática durante el 2021 en la plataforma interactiva estuvieron disponibles los diferenciados: Límites, Derivadas e Integrales, Geometría 3D, Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial, pero aún no se encuentra disponible el Diferenciado de Pensamiento Computacional.

Como esta plataforma se habilitó en mayo del 2021, los docentes que comenzaron el Diferenciado de Límite, Derivadas e Integrales el año 2020 y producto de la pandemia debieron continuar con el Diferenciado el año 2021, no lograron usarla, ya que, los contendidos se fueron habilitando a medida que avanza el ciclo escolar, los docentes que comenzaron en marzo de 2021 con su diferenciado y ya habían avanzado tampoco consiguieron emplearla de la forma en que está diseñada, debido a que iban una unidad más avanzada de la disponible en la plataforma. Aquellos docentes que en marzo y abril comenzaron con unidades de reforzamiento y en mayo comenzaron la primera unidad del diferenciado si consiguieron emplear la plataforma como está diseñada.

En septiembre de 2021 en la plataforma se encuentran; Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones, Unidad 2: Reconocer un patrón infinito y la noción de límite, Unidad 3: Modelar situaciones de cambio con derivadas.

Existe la necesidad de que a los profesores en formación se concienticen que ellos tienen la obligación, la capacidad y las habilidades para poder diseñar actividades acordes a las propuestas por el Mineduc en sus planes y programas y contextualizadas a la realidad de sus estudiantes.

La plataforma que generó el ministerio es un buen recurso, pero presenta la dificultad de necesitar una conexión a internet estable que permita estar en la videollamada y en la plataforma a la vez durante las clases virtuales o computadores para todos los estudiantes que asisten al Diferenciado en el caso de las clases presenciales, lo que no es viable para todos los colegios.

Las capacitaciones que acompañan a la plataforma tienen como principal obstáculo el tiempo para llevarla a cabo, son 60 minutos en los que no se alcanza a ver y solucionar las dudas existentes en profundidad.

Los cursos anuales del CPEIP dependen de la disponibilidad que los docentes en ejercicio tengan para ocupar su tiempo libre en estas capacitaciones, que en la mayoría de los casos no les traen ningún beneficio más que la satisfacción de conocer técnicas y experiencias de aprendizaje para el contenido del Diferenciado.

Desde este punto de vista, luego de realizada la investigación hace falta incorporar en las capacitaciones organizadas por el Mineduc un trabajo con los docentes para que estos logren adaptar las actividades planteadas por el Programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales. De esta forma se estaría contribuyendo de forma práctica y concreta a lograr una mejor comprensión del concepto de límite de funciones.

La presente propuesta busca que los docentes en formación rediseñen tareas sobre límite de funciones, presentes en el Programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales, así cuando tengan que impartir el Diferenciado ya cuenten con la habilidad de diseño de tareas que el Mineduc considera parte de la labor docente (Mineduc, 2019).

1.2 Investigaciones sobre límite de funciones

1.2.1 Aspectos epistemológicos del concepto de límite de una función

A continuación, se explicará brevemente la evolución del tipo de investigaciones que se han hecho desde la educación matemática dentro del área de cálculo diferencial e integral.

Tall y Vinner (1981) definen como esquema conceptual (concept image) a la estructura cognitiva que construye un individuo a lo largo de su vida, a través, de sus experiencias que se encuentran asociadas con un concepto matemático, albergando todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados al concepto (Tall y Vinner, 1981).

Sierpinska (1987) presenta un reportaje sobre cuatro sesiones de 45 minutos con un grupo de estudiantes de humanidades de 17 años cuyo objetivo es explorar las posibilidades de elaborar situaciones didácticas que ayudarían a los estudiantes a superar los obstáculos epistemológicos relacionados con los límites, describiendo y analizando las actitudes de los estudiantes pertinentes al desarrollo de la noción de límite, así como los cambios de estas actitudes.

Gray y Tall (1994) establecen la noción Teórica del Procepto (Proceso/Concepto), donde se establece que el simbolismo matemático hace referencia de forma ambigua tanto al proceso, como al concepto, esperando que los estudiantes logren moverse con flexibilidad entre estas diferentes interpretaciones.

Tall establece tres modos de operación en matemática; una a través de la encarnación física, una segunda mediante el uso de símbolos matemáticos y una tercera a través de las matemáticas formales en el PMA.

Sfard (1991) menciona que las concepciones pueden ser operacionales, cuando se tratan las matemáticas como procesos dinámicos, algorítmicos y acciones, o estructurales cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Esta autora afirma que para comprender profundamente un objeto matemático es imprescindible la habilidad de verlo a la vez como un proceso y como un objeto, pero considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales.

Para formar una concepción, Sfard distingue tres etapas, que corresponden a tres grados de estructuración progresiva, estas son: interiorización, condensación y cosificación; se consideran las etapas de interiorización y de condensación como procesos graduales y cuantitativos, mientras que la etapa de cosificación se considera un proceso casi instantáneo.

Godino (2009) propone la idea inicial del modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM), que se encuentra basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y consiste en un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didáctico que debe poseer un profesor. En este modelo se hace referencia a dos herramientas: (1) las facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional, y (2) los niveles de análisis: prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos, normas e idoneidad.

Pino Fan y Godino (2015), dan a conocer que para cada faceta y nivel de análisis se han elaborado y refinado nociones específicas que permiten observar de una forma más detallada las prácticas matemáticas y didácticas. El CDM interpreta y caracteriza los conocimientos del profesor considerando 3 dimensiones: (1) dimensión matemática, (2) dimensión didáctica y (3) la dimensión meta didáctico-matemática y lo divide en 2 subcategorías: (1) el conocimiento común del contenido, considerado como aquel conocimiento de un objeto matemático suficiente para resolver tareas del currículo en un nivel educativo determinado y el conocimiento ampliado del contenido, considerado como aquel conocimiento que debe poseer el profesor sobre las nociones matemáticas que deben considerar aquello que está más allá de lo que se está estudiando en el currículo en un momento determinado, este conocimiento provee al profesor de las bases necesarias para plantear retos en el aula y vincular el objeto matemático en estudio con otras nociones matemáticas.

Godino, Giacomode, Batanero y Font (2017) caracterizan los Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), donde se postula que, para resolver una tarea matemática, el profesor debe ser capaz de movilizar una diversidad de significados personales e institucionales, procedimientos distintos, justificaciones y explicaciones diversas o adaptadas a los conocimientos de los estudiantes. En el artículo antes citado se mencionan las competencias didácticas específicas como: (1) la competencia de análisis de significados globales, (2) la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, (3) la competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, (4) La competencia de análisis normativo, (5) la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

> Pero incluso para cada significado parcial del objeto, y la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan, es necesario que el profesor conozca la trama de objetos y procesos implicados, con el fin de poder planificar la enseñanza, gestionar las interacciones en el aula, comprender las dificultades y evaluar los niveles de aprendizaje de los estudiantes (Godino et al., 2017, p.109).

En la cita anterior se puede observar con claridad todos los aspectos involucrados dentro de un proceso de instrucción matemática tan básico como el significado parcial de un objeto, esto nos da una pincelada sobre los grandes desafíos a los cuales se enfrentan los profesores en su quehacer diario, para lograr llevar a cabo un proceso de instrucción, estos no son evidentes para quienes observan desde afuera de las aulas.

1.2.2 Dificultades en la comprensión del límite de una función

En concepto de límite de una función pertenece al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), este término se comenzó a utilizar en 1985 en el congreso del PME (Psychology of Mathematics Education) con el objetivo de estudiar la naturaleza del mismo. A través de las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal se determinó que el PMA involucra la movilización de procesos mentales de orden superior como; abstraer, representar, conceptualizar, inducir y visualizar (Dreyfus, 1990; Tall, 1991).

Por la naturaleza del concepto de límite, su proceso de enseñanza aprendizaje es complejo y su comprensión profunda puede no concretarse debido a obstáculos epistemológicos, concepto que fue desarrollado por Bachelard, al postular que “la naturaleza que nuestras mentes no están en blanco al momento de aprender o enseñar, sino que se encuentra direccionada por lo que: conocemos, pensamos, creemos o queremos ver" (Bachelard, 1938, p. 15).

La idea de obstáculo epistemológico se desarrolla en algunas investigaciones como la realizada por Cornu (1983) donde se da a conocer la tesis sobre el aprendizaje de la noción de límite y prolongada por Sierpinska (1994) al descubrir los medios didácticos para ayudar a los estudiantes a superar los obstáculos epistemológicos relacionados a las matemáticas que se enseñan en la escuela.

Según Bachelar (1938) dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico son: el carácter inevitable de su aparición, y la repetición de su aparición en la evolución del concepto y en el origen del objeto.

Sierpinska (1994) propuso una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite a partir de la observación de dos parejas de alumnos identificando la tangente como límite de una secante variable, y encontrando la ecuación de la tangente de una curva representativa de la función seno en el origen, estos son:

1. **Horror al infinito**: rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite, la transferencia automática de los métodos del álgebra propuesto para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite a un movimiento físico, a una aproximación.
2. **Los obstáculos ligados al concepto de función**: no visualización de la noción de función subyacente, restricción de una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior.
3. **Los obstáculos geométricos**: la intuición geométrica constituye en un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que debiera comprenderse por la diferencia de dos magnitudes como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto.
4. **Los obstáculos lógicos:** ligados a la eliminación de los cuantificadores o de su orden.
5. **El obstáculo simbólico:** ligado a la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Además de los obstáculos epistemológicos, existen otras dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de los límites de una función, estos son:

1.2.2.1 Dificultades cognitivas en la comprensión del infinito

Mamona-Downs (2001) da a conocer tareas que fomentan la intuición y las primeras nociones sobre los procesos limitantes de las secuencias reales en los estudiantes, encontrando que un problema recurrente es que se fomenta una imagen intuitiva de una secuencia que tiene un término asociado con el límite.

Barahmand (2017) muestra que los errores más comunes de los estudiantes son considerar el infinito como un número y aplicar resultados finitos conocidos a estados infinitos, esto es un indicador que la comprensión del infinito por parte de los estudiantes está relacionada con situaciones finitas llegando a considerar los procesos infinitos como una forma generalizada de procesos finitos.

1.2.2.2 Dificultades de comprensión del concepto formal $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\delta}$

Blázquez et al., (2006) busca establecer la definición más simple de límite para la docencia, para ello compara concepto de límite utilizado tradicionalmente dado por Weierstrass, con el concepto de aproximación óptima dado por Blázquez y Ortega (2002), llegando a concluir que el segundo concepto es más adecuado para el aprendizaje inicial debido a que es más sencillo que el primero.

1.2.2.3 Desafíos didácticos en la enseñanza de los límites

Monaghan (1986), investiga las concepciones de los adolescentes con capacidad matemática sobre las nociones básicas del cálculo, años más tarde, en 1991 informa de los aspectos del estudio que examinaba la comprensión por parte de los estudiantes del lenguaje usado por los profesores para comunicar los conceptos del cálculo, frases como tiende a, se aproxima a, converge y limita se usan habitualmente en los cursos de cálculo, donde sus significados matemáticos son equivalentes, pero, los estudiantes construyen imágenes del concepto de límite que difieren de los conceptos de los matemáticos.

Caglayan (2015), muestra al software GeoGebra como un instrumento que puede ayudar a los estudiantes universitarios a comprender, explorar y adquirir experiencias en la visualización de los límites de las funciones y el formalismo ϵ-δ, mostrando que los enfoques pedagógicos y las estrategias de enseñanza basadas en la matemática experimental permitirían a los estudiantes estudiar, construir y conectar significativamente el nuevo conocimiento con los conceptos y habilidades previamente dominados de una manera que tendría sentido para ellos.

Rueda et al., (2017) plantea la enseñanza en mundos virtuales como una posibilidad didáctica, buscando establecer las limitaciones, desafíos, fortalezas y oportunidades requeridas para integrarlos como recursos didácticos digitales, para ello dan a conocer las bases para diseñar un modelo didáctico que apoye al docente en el uso de los mundos virtuales con fines educativos.

Un tema recurrente en las investigaciones antes mencionadas es la referencia al desafío de que implica la enseñanza del concepto de límite de una función, debido a: 1) los obstáculos epistemológicos (relacionados con los conceptos de infinito y función, o de tipo geométrico, lógicos o simbólico) que dificultan un aprendizaje significativo de todos los estudiantes y 2) a que este concepto muchas veces se trabaja como un algoritmo que luego se reduce a un cálculo numérico, en un proceso finito, esto provoca que no se analice el proceso infinito de aproximación que es necesario para comprender el concepto de límite de una función, generando que no se conceptualicen de la forma adecuada los significados asociados al límite de una función que son necesarios para su comprensión. Este aspecto es un desafío aún abierto para la formación inicial docente, en particular para los estudiantes de pedagogía en matemática, lo que convierte en un área de oportunidad el investigar cómo se pueden desarrollar estos procesos en los estudiantes, esto nos lleva a preguntarnos: ¿Cuáles son los significados o conocimientos que debe tener un profesor en formación para lograr que sus estudiantes comprendan el concepto de límite de funciones?

1.2.3 Acercamientos didácticos al concepto de convergencia de una sucesión.

Para comprender el concepto de límite de una función es fundamental desarrollar algunas nociones previas como la noción de límite de sucesiones, debido a que ahí emerge el significado de convergencia que es fundamental para entender los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función real de variable real. A continuación, se detallan algunas investigaciones que abordan este punto:

Robert (1982) muestra cómo se adquiere la noción de convergencia de sucesiones numéricas, donde primero se resuelve un cuestionario en grupos, luego se introduce la definición de la convergencia pasando de la formulación numérica a la formalización algebraica y de ahí a la formulación geométrica.

Sierpinska (1987) indica que el contexto de series infinitas puede ayudar a superar al menos algunos obstáculos relacionados con conocimiento científico, infinito y números reales que constituyen la principal fuente de obstáculos epistemológicos relacionados con límites.

Cantoral y Reséndiz (1997) dan a conocer que es importante analizar algunas de las representaciones gráficas que las sucesiones pueden tener, puesto que la visualización es un aspecto al que los estudiantes no le sacan provecho cuando aprenden sucesiones numéricas infinitas.

Cantoral y Montiel, (2001) consideran a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual, tratándola como un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico.

En diversos estudios se reporta la importancia de la intuición y la visualización al estudiar la convergencia de sucesiones numéricas infinitas, sin embargo, Cantoral y Reséndiz (2003) indican que en las aulas no pasa lo mismo, pues en el salón de clases los discursos son autoritarios y los formatos comunicativos son rígidos y poco reflexivos por parte del docente, debido a la creencia que los conocimientos para enseñar en educación superior ya están preestablecidos, por lo que no se hace una reflexión en como entregar la información a los estudiantes de tal forma que sea comprensible para ellos.

Alcock y Simpson (2004) observaron que estudiantes visualizadores son a menudo más rápidos y seguros al hacer un juicio acerca de la veracidad de un enunciado. Sin embargo, el éxito del trabajo visual en este nivel depende de que los estudiantes estén dedicados y sean capaces de establecer y usar relaciones que les permitan utilizar su representación visual para guiar su razonamiento formal, ellos concluyen que, no existe una representación perfecta que sea accesible y genere resultados óptimos en todos los estudiantes.

Alcock y Simpson (2005) abordan problemas acerca de la convergencia de sucesiones y series realizados por estudiantes que no tienen tendencia a visualizar, además se confrontan los resultados con el trabajo de estudiantes que visualizan logrando vincular la visualización y la convergencia de sucesiones.

En 2007, Calvillo y Cantoral reportan un estudio de la teoría de sucesiones numéricas infinitas analizando su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema por medio de la visualización, aquí identifican que el paradigma de enseñanza que se sigue al estudiar las sucesiones está centrado en enfoques axiomáticos deductivos, pretendiendo con ello establecer un proceso que les permita a los estudiantes construir la noción de convergencia de sucesiones, para ello proponen estudiar la teoría de sucesiones atendiendo su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema, por medio de la visualización en lugar de la definición rigurosa y formal.

1.2.4 Acercamientos didácticos al concepto de límite de una función

1.2.4.1 Utilizando la noción de aproximación

Según lo planteado por Cornu (1991) el concepto de límite es difícil de enseñar y aprender, debido a que pertenece al pensamiento matemático avanzado, se encuentra posicionado en el análisis matemático con sus fundamentos en la teoría de aproximación, de continuidad y del cálculo diferencial e integral.

Otros autores como Blázquez y Ortega (2002), siguiendo los pasos de D'Alembert utilizan la noción de aproximación y tendencia con el fin de plantear una definición del concepto de límite funcional que sea fácilmente recordada por los estudiantes, estas son:

> **Aproximación:** Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número, son cada vez menores.
>
> **Tendencia:** La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable (p. 14).

Otra definición es la generada por García et al., (2002)

> La aproximación es una expresión relacional, que establece una relación entre un valor exacto y el valor aproximado, la posibilidad de aceptar que una representación es la representación aproximada de un valor exacto, exige usar la regla del error absoluto (p. 17).

En García et al., (2002) se indica que aceptar cierta regularidad en las aproximaciones que se obtienen en el proceso de intuir el resultado final implica considerar los errores absolutos de la aproximación se hagan tan pequeños como se desee, esto permite visualizar los procesos infinitos de aproximación como un todo.

Blázquez y Ortega (2002) plantean la noción de aproximación consistente en el primer acercamiento que tienen los estudiantes al concepto de límite de una función, este es:

> “Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe lim$x \rightarrow af(x)$, si cuando "x" se tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "$f(x)$" tienden a "L"” (p. 14).

Alanís (1996) diseña una serie de secuencias didácticas que permiten esclarecer cambios en los contenidos a enseñar en un curso de Cálculo, así como en los roles de profesor y estudiantes, a fin de que puedan apropiarse de las ideas fundamentales del Cálculo proponiendo a la Cinemática como el contexto inicial adecuado para abordar el problema de “predecir cuál va a ser la posición de una partícula que se mueve en línea recta”. Argumenta que, al dar una respuesta cada vez más elaborada a dicho problema de predicción, el estudiante tiene la oportunidad de apropiarse de la idea paradigmática de Newton.

Salinas y Alanís (2009) diseñan una propuesta para la enseñanza del Cálculo que se enmarca en el acercamiento socioepistemológico, y toma a la práctica de predicción como hilo conductor en el desarrollo de las nociones y procedimientos del Cálculo. En esta propuesta denominada el método de Euler, existe la selección de una secuencia de problemas que introducen paulatinamente al estudiante al proceso de aproximar el valor de una magnitud bajo estudio, a través de cierto procedimiento numérico. Este método permite la incorporación simultánea de las nociones razón de cambio y cambio acumulado, y propicia que las nociones de derivada e integral se vean implicadas desde el inicio de un primer curso de Cálculo.

Continuando la propuesta anterior, Salinas y Alanís (2010) propone integrar, didácticamente hablando, un acercamiento newtoniano con un acercamiento leibniziano a la génesis del Cálculo, bajo la convicción de que un discurso tal ofrece mayores oportunidades para que el estudiante se apropie de las ideas que subyacen a la construcción de las nociones y procedimientos del Cálculo en su papel de herramientas para resolver problemas reales relacionados con el estudio del cambio. Su propuesta consiste en 1) diseñar actividades para la introducción del paradigma newtoniano a través del procedimiento numérico reconocido como método de Euler; 2) llevar a efecto una secuencia de escenificaciones que incluyan dichas actividades en el primer curso de

Matemáticas para Ingeniería; 3) capturar información para apreciar la efectividad de la adquisición de dicho procedimiento en cada escenificación y que sugiera elementos para su mejora y 4) fortalecer el establecimiento de una secuencia didáctica que funcione como epistemología de las nociones de razón de cambio y cambio acumulado.

1.2.4.2 Utilizando el uso de representaciones

Para enseñar límite de funciones es necesario utilizar distintos tipos de representaciones como: verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Enseguida se expondrán una serie de investigaciones que se apoyan en el uso de la representación y algunos medios para elaborar un análisis sobre ella.

En los trabajos desarrollados por Engler et al., (2007 y 2008) estos autores plantean el uso de secuencias didácticas que hagan uso del cambio de registro de transformación identificando lo siguiente:

Engler et al., (2007) diseñaron una secuencia didáctica que buscaba analizar el desarrollo de la comprensión de la idea de límite de una función empleando diferentes modos de representación, en sus resultados encontraron que los estudiantes no tuvieron dificultades en comprender los límites de forma tabular o gráfica, pero un alto porcentaje no interpretaron el significado al trabajar la representación algebraica.

Engler et al., (2008) plantean una secuencia didáctica orientada a preparar a los estudiantes para el aprendizaje del límite infinito, a través, de las distintos modos de representación en el trabajo con funciones, confirmando que existen muchas variables que afectan el rendimiento de los estudiantes como: la naturaleza de la matemática, los tipos de aprendizajes matemáticos, el ambiente escolar, el profesor, el alumno, las variables cognitivas del alumno, las variables del currículum escolar, la metodología de trabajo y finalmente la evaluación.

Mientras que en los trabajos de Fernández (2010 y 2011) se trabaja en el diseño de una unidad didáctica que usa como referente para el análisis del límite el cambio de registro de representación, donde se identificó lo que se presenta enseguida:

Fernández (2010) diseña una unidad didáctica que busca describir como los estudiantes expresan verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite de una función en un punto.

Fernández (2011) explora y describe los significados de límite finito de una función en un punto que los estudiantes muestran cuando realizan tareas de enunciado verbal, gráfico y simbólico.

Algunos de los resultados obtenidos en este estudio son: observar que la mayor parte de los estudiantes que afirman que el límite no puede rebasarse, justifican su interpretación mediante la inalcanzabilidad del valor, se aprecia una mejor expresión de las nociones básicas cuando se cuenta con algún apoyo gráfico que cuando no se dispone de él y la interpretación del límite como lugar donde cambia de manera brusca la función. Tal interpretación afirma la existencia, pero no concreta, el valor específico del límite de una función.

Frank y Thompson (2021) buscan responder la interrogante ¿ofrecen las matemáticas escolares oportunidades para que los estudiantes desarrollen significados productivos para el cálculo?. Este artículo informa sobre las respuestas de los estudiantes de cálculo de EE. UU. a los ítems que evaluaban el razonamiento variacional, los significados de la tasa media de cambio y el uso representativo de la notación, ideas que aparentemente se abordan en las matemáticas escolares. El estudio expuso una desconexión entre los significados productivos para el aprendizaje del cálculo y los significados transmitidos por los libros de texto y mantenidos por los profesores de secundaria de Estados Unidos.

1.2.4.3 Utilizando la tecnología

La aproximación al estudio del Cálculo y en PMA desde el empleo de la tecnología se ha hecho apoyado de diferentes software tanto de naturaleza educativa, como otros fuera de ella, generalmente este tipo de programas explota la capacidad de trabajar en tiempo real, la utilización de distintos registros de representación y que a través de secuencias de instrucciones bien organizadas, les permiten a los estudiantes analizar la naturaleza abstracta de diversos objetos matemáticos o razonamientos como el variacional y covariacional asociados, enseguida se expondrán algunos resultados de investigación enfatizando en la característica del programa computacional usado.

Hitt (2003) expresa que la enseñanza del cálculo ha estado enfatizada a aspectos algebraicos sin atender otras representaciones, lo cual limita la comprensión de conceptos fundamentales del mismo, es decir, tradicionalmente el proceso algorítmico tiene prioridad en el aula tradicional para la enseñanza del límite de funciones, relegando el análisis numérico y geométrico a un segundo plano, esto motiva la incorporación de la tecnología a la enseñanza para lograr que estas tres aristas del concepto sean exploradas con el mismo nivel de importancia.

Para lograr la incorporación de la tecnología a las aulas se han realizado muchas investigaciones, entre ellas:

Rangel et al., (2014) buscando que los estudiantes de educación superior aprendieran límite y continuidad, se aplica un diseño instruccional con el uso de Winplot. Sus resultados indicaron que los estudiantes tuvieron dificultades en la interpretación de los acercamientos numérico y geométrico del concepto al inicio de las actividades, para luego de aplicada la estrategia didáctica se logró una mejor visualización, tratamiento y un desempeño sobresaliente en la solución de problemas. Además, los estudiantes desarrollaron habilidades de trabajar en grupo, visuales, operativas y racionales, ya que la estrategia es más integradora que una enseñanza tradicional.

Mientras Torroba et al., (2006) presentan una experiencia desarrollada con estudiantes que cursaban la asignatura Análisis I correspondiente a las carreras Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, para introducir el concepto de límite mediante una propuesta didáctica, basada en la visualización con el empleo de las TIC, buscando generar habilidades a través del proceso de representación.

La experiencia buscaba desarrollar en los estudiantes la visualización matemática, entendida como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual generada a través del empleo de tecnología. La propuesta consistía en la introducción al concepto de límite mediante la definición formal, seguida por una clase práctica en la sala de computación considerando aspectos gráficos y numéricos del concepto y una clase de autoevaluación en la sala de computación con la inclusión de material extraído de internet.

La visualización matemática permite comprender mejor la noción de límite usando las relaciones entre ε y δ al analizar los gráficos de distintos tipos de funciones. Esto se logra con las utilizando las TIC para visualizar gráficamente conceptos teóricos, permitiendo la interacción entre profesor y estudiantes para obtener una relación simbólica que repercute en una mejor y más rápida asimilación de los conceptos.

Zapata et al., (2014) buscan identificar cuáles son las concepciones que se generan en estudiantes entre la transición de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial sobre el concepto de límite, mediante una entrevista semiestructurada de carácter socrático a medida que se avanza en ella, se va interactuando con el software de GeoGebra permitiendo al estudiante a visualizar representaciones que no son muy perceptibles en el momento. En los resultados de esta investigación se evidencia que los estudiantes tienen la idea de la representación gráfica y el acercamiento lateral con respecto a un punto y en algunos casos conciben el proceso límite como un valor alcanzable de carácter local que se puede acercar a dicho valor puntual lateralmente.

En el estudio de Betancur et al., (2015a) se presentan una propuesta didáctica para la iniciación al estudio del concepto de límite para estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario mediante el software matemático interactivo GeoGebra. La propuesta consiste en un análisis del contexto histórico y la evolución del concepto, vislumbrando lo complejo del límite. Buscando mejorar la interpretación del límite como una idea de aproximación óptima, se utiliza la definición de límite propuesta por Blázquez y Ortega (2002) basada en la definición de D'Alembert, como un paso previo a la definición formal del límite propuesta por Weierstrass.

Betancur et al., (2015b) describen cómo contribuye la noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite en los estudiantes. La experimentación se realizó con las actividades diseñadas en la propuesta didáctica que hacía uso de GeoGebra. Los resultados obtenidos permitieron evidenciar, cómo una clara comprensión de la noción de aproximación óptima aporta en la precisión de las ideas de tendencia en términos de distancias en el estudiante y le proporciona una forma más simple de comprender el límite como lo que sucede cerca del punto y no en el punto.

Toh (2021) examina el plan de estudios de cálculo de las escuelas de Singapur en los niveles de secundaria superior y preuniversitario a la luz del marco curricular de matemáticas de Singapur. Se distinguen tres características clave del contenido de cálculo: (1) un enfoque intuitivo del cálculo apoyado en el uso de la tecnología; (2) un énfasis en las técnicas, y (3) un énfasis en el conocimiento procedimental sobre el conceptual. Los resultados indican que los estudiantes no identificaron visualmente los conceptos de cálculo estudiados procedimentalmente, demostraron una falta de comprensión conceptual de los procedimientos de cálculo, indicando que los conocimientos parciales de cálculo adquiridos en los primeros niveles de secundaria superior no necesariamente facilitan la adquisición de un concepto más completo en el nivel preuniversitario y el conocimiento procedimental de los estudiantes sobre el cálculo no parecía desarrollar su fluidez o flexibilidad procedimental.

Retomando lo mencionado en el punto anterior como en las investigaciones hacen referencia al desafío que implica la enseñanza del concepto de límite de una función debido a diferentes factores a considerar, por ello es necesario investigar los acercamientos didácticos que se han realizado al concepto de límite de una función, ya que nos permite establecer que se ha hecho hasta el momento en este aspecto y que falta por realizar, cuáles de los acercamientos han obtenido mejores resultados y cuáles son estos resultados. Para esclarecer los puntos anteriores se recopiló información referente a las investigaciones sobre límite de funciones que utilizan: 1) la noción de aproximación, 2) las representaciones y 3) la tecnología. En cada aproximación, algunas de las investigaciones tuvieron más éxito que otras, pero en conjunto son un aporte a la investigación en didáctica de la matemática. La investigación busca generar un cuestionamiento de cómo los profesores en formación diseñan sus tareas y plantear que es necesario que este aspecto sea incluido en los planes y programas de las carreras de pedagogía en matemática de Chile y potenciado si ya existe.

1.3 Investigaciones sobre diseño de tareas en el concepto de límite de funciones

El diseño de tareas es una de las capacidades que debe poseer cualquier profesor, en particular, el profesor de matemática, ya que, a partir del planteamiento de estas, se genera un escenario que tiene por objetivo explorar y conocer a los objetos matemáticos con los que se modela el mundo. La actividad de diseñar tareas ha sido ampliamente explorada en la educación matemática, dado que en la figura del docente es el principal actor en donde recae esta labor, la cual debería de ser promovida desde su formación. A continuación, se presentan algunos resultados de investigación respecto a este tema.

En el trabajo desarrollado por Sierpinska (1987) se presenta un reportaje sobre cuatro sesiones de 45 minutos con un grupo de estudiantes de humanidades de 17 años cuyo objetivo es explorar las posibilidades de elaborar situaciones didácticas que ayudarían a los estudiantes a superar los obstáculos epistemológicos relacionados con los límites, describiendo y analizando las actitudes de los estudiantes pertinentes al desarrollo de la noción de límite, así como los cambios de estas actitudes.

En esa situación donde el sujeto de estudio es el profesor, Moreno-Armella (2021) muestra una parte significativa de la experiencia de un profesor a lo largo de varios semestres enseñando ideas fundamentales de la Teoría del Cálculo, explicando cómo evolucionó su mentalidad didáctica y matemática al ser testigo de las dificultades conceptuales de los alumnos, al enfrentarse a situaciones que generaban tensiones entre sus intuiciones y el rigor formal de la teoría del cálculo. La evolución de los ambientes en el aula, los esfuerzos por enseñar y los profundos obstáculos para el aprendizaje, indican la existencia de una fisura epistémica al abandonar el modo de pensar dinámico y geométrico e intentar adoptar un modo de pensar desarrollado a partir del rigor aritmético y la presencia del infinito.

Mientras que Ghedamsi y Lecorre (2021) se aborta el problema del paso entre el cálculo de la escuela secundaria y el cálculo universitario, mostrando las características compartidas entre las expectativas del bachillerato y de la universidad en el aprendizaje del cálculo de los estudiantes, y en los principales impedimentos para que el bachillerato cumpla con los requisitos de la universidad y se propone un método experimental para ayudar a los profesores de secundaria a reconsiderar sus acciones en función de las insuficiencias en la preparación de los estudiantes para el cálculo universitario. Los resultados muestran que es posible encontrar un vínculo entre el cálculo de bachillerato y el universitario para reducir las diferencias y mejorar la transición de los estudiantes.

Continuando con estudios centrados en los estudiantes Hitt y Dufour (2021) muestran los problemas cognitivos que tienen los estudiantes en el aprendizaje del cálculo cuando resuelven problemas situacionales, es decir, se observa la actividad matemática de los estudiantes mientras resuelven una tarea abierta relacionada con la velocidad. Se analiza el uso de diferentes representaciones en el proceso de modelización de la situación, la evolución de estas representaciones cuando los estudiantes trabajan en un enfoque de aprendizaje colaborativo, y la construcción del concepto de la derivada.

Mientras, en un trabajo completamente distinto y centrado en lo curricular, Bastias et al., (2021) presenta los resultados de un estudio de tipo histórico-epistemológico, que se llevó a cabo para identificar los criterios a considerar en el diseño de tareas para promover la comprensión de la noción de límite de una función en una variable real. Como resultado, se presenta una propuesta de criterios, que resumen aspectos epistémicos fundamentales, que se podrían considerar para el diseño de tareas que permiten promover cada uno de los seis significados parciales identificados para la noción de límite.

Una vez finalizada esta revisión se observa que aún falta por realizar:

- Estudios que propongan criterios para diseñar tareas que consideren la riqueza y complejidad de contenidos que requieran PMA como derivadas e integrales.
- Establecer una concordancia entre lo enseñado en la universidad a los futuros docentes de matemática y lo que estos deberán enseñar en su desarrollo docente.
- Realizar análisis de significados de objetos matemáticos relacionados con el cálculo en libros de texto y planes de estudio de educación media y superior.
- Difundir la información recopilada en las investigaciones a los docentes en ejercicio

Lo que lleva a plantear las siguientes interrogantes: ¿Qué tipo de configuraciones de objetos y procesos matemáticos acerca del objeto límite de funciones presentan los rediseños de actividades de libros de texto?, ¿Cómo es la relación del conocimiento didáctico y matemático que un profesor en formación necesita al rediseñar actividades sobre límite de funciones?, ¿Qué tan idóneas son las propuestas de rediseño efectuadas por profesores en formación?, ¿Qué tan idóneas son las tareas sobre límite de funciones que rediseña un profesor de matemática en formación?, ¿Qué tipo de conocimientos didáctico matemático necesita un profesor en formación para poder rediseñar tareas de forma idónea?.

2. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Para mostrar el área problemática, la presente investigación ha considerado necesario desarrollar los siguientes puntos con el propósito de plantear el rediseño de problemas por parte de los profesores como parte de una competencia didáctico matemática: (1) establecer las competencias que debe tener el profesor de matemáticas planteadas tanto en el currículo como en las investigaciones del área; (2) establecer que el diseño de tareas es considerado parte de la actividad del profesor de matemática de enseñanza media; (3) efectuar una revisión histórica y curricular del concepto límite de funciones, finalizando con un examen del programa de estudio 3° o 4° medio, formación Diferenciada, Límite, Derivadas e Integrales del Mineduc en busca de los significados de límite presentes en él.

2.1 Las competencias del profesor de matemáticas, una relación entre el Mineduc y las investigaciones

Los profesores son identificados como parte fundamental del éxito o fracaso de los programas de enseñanza, por ello, en las diferentes propuestas ministeriales se exponen los requerimientos, desafíos, conocimientos y recursos que son necesarios para llevar a buen término esta labor. A continuación, se dan a conocer algunos de los recursos y criterios que presenta el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc) para valorar la práctica docente, en particular como estos elementos impactan de manera punitiva en la Carrera Docente, a través, del Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente, entre ellos se encuentran el marco para la buena enseñanza (MBE) y los estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media (Estándares).

El perfil del profesor, de acuerdo con MBE, se encuentra dividido en cuatro dimensiones, a saber, preparación de la enseñanza, creación de un ambiente propicio para el aprendizaje, enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes y responsabilidades profesionales. En ellas se identifica que la primera hace referencia a las competencias que debe poseer el profesor, como se cita a continuación:

> Los criterios de este dominio se refieren, tanto a la disciplina que enseña el profesor o profesora, como a los principios y competencias pedagógicas necesarios para organizar el proceso de enseñanza, en la perspectiva de

> comprometer a todos sus estudiantes con los aprendizajes, dentro de las particularidades específicas del contexto en que dicho proceso ocurre (Mineduc y CPEIP, 2008, p.8).

Como puede notarse en la cita anterior, de acuerdo con el Mineduc, el profesor debe poseer dos competencias; (1) Situada en la competencia disciplinar y otra (2) en la Competencia pedagógica. Por ejemplo, autores como Pino-Fan y Godino (2015) identifican que la competencia idónea en matemáticas es el acoplamiento entre la configuración epistémica (saber matemático) y el contexto de la práctica. En conclusión, con lo anterior identificamos que el profesor de matemáticas debe poseer dos competencias mínimas: (1) saber matemático y (2) un saber pedagógico, desde la didáctica de las matemáticas, este saber puede ser mirado como el conocimiento del contenido (Godino, 2009) que puede ser clasificado en 3 niveles: común (busca la resolución de la tarea), especializado (pone en juego las posibles soluciones de la tarea) y ampliado (busca la identificación de posibles soluciones considerando sus conexiones con temas más avanzados).

Todo lo expresado con anterioridad genera interrogantes como las planteadas por Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017, p.100:

> "¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas).
>
> ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los problemas? (configuraciones cognitivas)."

La presente propuesta de investigación acogerá parte de estos cuestionamientos y los situará en el proceso de rediseño de actividades planteadas por los libros de texto, lo que lleva a pensar en cuestiones como: ¿Qué tipo de configuraciones de objetos y procesos matemáticos acerca del objeto límite de funciones presentan los rediseños de actividades de libros de texto?, ¿Cómo es la relación del conocimiento didáctico y matemático que un profesor en formación necesita al rediseñar actividades?, ¿Qué tan idóneas son las propuestas de rediseño?, entre otras.

2.2 El diseño de tareas como parte de la actividad del profesor de matemática de enseñanza media

Durante la formación profesional del profesor, el diseño de tareas se considera parte de la actividad del docente de matemática de enseñanza media, en los Estándares se dan a conocer 8 habilidades básicas que se espera logren los futuros profesionales chilenos, el punto 4 hace referencia al diseño de tareas mencionando.

> Capacidad creativa, espíritu emprendedor e innovación. El egresado demuestra creatividad al generar nuevas alternativas en las soluciones que se plantean. Realiza proyectos por iniciativa propia, asumiendo los riesgos que esto implica. Responde a los requerimientos, demandas sociales y organizacionales, innovando en los procesos a fin de obtener mejores y mayores resultados (CIAE, 2012, pág.17).

En la cita anterior se mencionan algunas de las habilidades que deben tener los docentes en ejercicio, mencionando que el diseño de tareas es una parte esencial de su labor, la que debe efectuarse con iniciativa buscando soluciones a las problemáticas generadas.

Investigaciones situadas desde la didáctica de las matemáticas coinciden con lo propuesto por el Mineduc, en particular con los aportes de Zaslavsky y Sulivan (2011) quienes postulan que en la formación de profesores es necesario incorporar al aprendizaje de los estudiantes la exploración de problemas con respuestas variadas o distintas estrategias de solución, la habilidad de encontrar múltiples estrategias de resolución de problemas y cómo aumentar el grado de apertura de los problemas planteados en los libros de texto, con el objetivo que los profesores en formación se apropien de estas estrategias y las lleven al aula de clases logrando así un aprendizaje de todos los estudiantes.

Considerando al tipo de tareas que pueden rediseñar los profesores en formación, Zaslavsky (1995) define como tareas de final abierto, a aquellas donde al realizarse pequeñas modificaciones se logran grandes diferencias y cuando los docentes trabajan con este tipo de tareas tienden a cambiar sus prácticas pedagógicas debido a que adquieren la confianza para enseñar de una forma diferente.

Llegado a este punto se puede plantear la siguiente interrogante ¿Por qué hacer foco en las tareas?, como una primera respuesta podemos mencionar que "Las tareas que el profesor selecciona para la clase y la manera en que solicita a los estudiantes que se aproximen a ellas, determinan la calidad de la matemática de la clase" (Guberman y Leikin, 2013, p.36).

El diseño de tareas no solo está presente como habilidad básica de la formación profesional, también se encuentra dentro de los conocimientos específicos que debe tener un docente, para abarcar este punto se describe la estructura de los Estándares, estos se encuentran clasificados de dos formas, los primeros abarcan el conocimiento pedagógico y los segundos se encuentran relacionados con el conocimiento matemático que debe poseer un profesor. Los estándares pedagógicos se encuentran compuestos por 10 puntos, el cuarto de estos hace referencia al diseño de tareas, señalando que los profesores deben ser capaces de planificar la enseñanza considerando la coherencia con el currículo nacional y el logro de los objetivos de enseñanza para todos los estudiantes. Los docentes deben planificar y llevar a cabo experiencias y secuencias de aprendizaje considerando las necesidades, intereses, conocimientos previos, habilidades, competencias tecnológicas y contexto de los estudiantes (CIAE, 2012).

Los Estándares relacionados con el conocimiento matemático, consideran 21 puntos que se encuentran subdivididos por área considerando: sistemas numéricos y álgebra, cálculo, datos y azar, estructuras algebraicas y geometría, dentro del apartado de cálculo tenemos 3 estándares donde se mencionan que el docente debe ser capaz de conducir el aprendizaje de números reales, sucesiones, sumatorias y series; manejar la competencia disciplinaria tanto en cálculo diferencial e Integral y sus aplicaciones (CIAE, 2012).

Llegado a este punto de la presente propuesta de investigación surgen las siguientes interrogantes: ¿Qué tan idóneas son las tareas que puede rediseñar un profesor de matemática en formación?, ¿Qué tipo de conocimientos didáctico matemático necesita para poder rediseñar tareas de forma idónea?

Considerando los puntos anteriores se puede observar, que hoy en día el profesor se encuentra con un gran desafío, lograr la incorporación en su planificación de objetos matemáticos de alto grado de dificultad, como el concepto de límite de funciones, planteado en las bases curriculares apoyadas en la nueva reforma (Mineduc, 2020), por lo que se considera necesario realizar la revisión basada en las investigaciones actuales para conocer las exigencias históricas y curriculares que demanda el manejo de ese objeto matemático.

2.3 Análisis histórico y curricular del concepto de límite de funciones

2.3.1 Análisis histórico del concepto de límite de funciones identificado en las investigaciones actuales

La investigación sobre el objeto matemático Límite de funciones, sitúa al conocimiento de este dentro de un Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) también conocido como *Advanced Mathematical Thinking*, en el que es necesario desarrollar y relacionar al menos tres procesos cognitivos que como son la: representación, traslación y abstracción (Rodríguez L., Bravo, Pérez, Rodríguez N., 2020).

Con respecto al PMA Tall y Vinner (1981), explican que el cerebro funciona de una forma compleja que a menudo difiere de la lógica de las matemáticas, por esto es necesario hacer una distinción entre los conceptos matemáticos formales y los procesos cognitivos mediante los cuales se conciben. Ellos definen el *concept image y el* c*oncept definition*, considerando como *concept image* a la estructura cognitiva total asociada con el concepto, esta incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados, es construida a través de experiencias de todo tipo y cambia a medida que el individuo se encuentra con nuevos estímulos y madura. El c*oncept definition* corresponde a la definición del concepto si este la tiene, es decir, las palabras utilizadas para especificar ese concepto. En el artículo anteriormente citado se postula que cuando existe una ruptura entre estos dos conceptos se pueden provocar obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes, para evitar la generación de obstáculos cognitivos es necesario que el profesor perfeccione sus prácticas de enseñanza, considerando como primer punto el conocimiento del contenido.

Aunque en el estudio histórico se acostumbra a tratar el cálculo infinitesimal como un todo integrando límite, derivadas e integrales, en el presente apartado se hará referencia únicamente a aquellos que mencionen el objeto matemático de límite de funciones.

El cálculo infinitesimal tiene su origen en la búsqueda de solución de varios problemas, en el presente documento nos referiremos a uno en particular, relacionado con encontrar la ecuación de la tangente a una curva dada, en un punto. Para dar solución a ese problema, según Muñoz y Román (1999) intervinieron muchos matemáticos a lo largo de la historia, entre ellos se puede mencionar a los siguientes: Apolonio (190 a.C.) construyó tangentes a las cónicas; Arquímedes (287-212 a.C.) construyó tangentes a las espirales; Fermat (1601-1665) encontró la tangente por medio de la definición del razonamiento: si $f(x)$ es un polinomio, entonces $f(x+h)-f(x)$ será un polinomio en h divisible por h; Descartes (1596-1650) trazó la circunferencia con centro en el corte de la normal a la curva con el eje de abscisas y que pase por un punto determinado; Barrow (1630-1677) plantea que la tangente era la recta que corta a la curva en solo un punto.

Llegado a este punto ya se trabaja con el concepto de infinito, pero sin una justificación rigurosa del mismo. El problema planteado anteriormente tenía soluciones particulares, pero ninguna de ellas se había acercado a la idea de límite aún, fue en ese momento que Newton y Leibnitz elaboraron un método general para resolver los problemas planteados, en particular el que hace referencia al límite. Cada uno con su estilo propio, Newton y Leibnitz lograron dar respuesta a los problemas planteados en esa época y por esta razón son considerados como los inventores del cálculo infinitesimal, Newton con un origen experimental no buscaba teorías globales, sino resultados concretos, en cambio, Leibnitz hacia todo lo contrario (Muñoz y Roman, 1999).

● Euler (1707-1783): creó muchos escritos, en particular uno titulado, Introductio in Analysis infinitorum (1748), donde se definió por primera vez la noción general de función como: una expresión analítica en la que intervienen variables y algunas constantes, con ello incluía además de las operaciones algebraicas, el paso al límite de sucesiones, sumas de series y funciones elementales conocidas. La historia le asigna a este matemático el mérito de manejar con facilidad los números infinitamente pequeños o infinitamente grandes (Muñoz y Roman, 1999).

● Lagrange (1736-1813): definió la función como “cualquier expresión útil para efectuar cálculos. En la que las variables intervienen de cualquier manera”, considerando expresiones distintas para trozos diferentes (Muñoz y Roman, 1999).

Llegado el siglo XIX se desarrollaron los conocimientos existentes a la fecha, en el problema que interesa a la presente propuesta de investigación se revisan los aportes de dos autores que son:

● Cauchy (1789-1857) logró definir con precisión el concepto de límite de una función y el de continuidad, además “aclara los infinitamente pequeños como las variables con límite cero y los infinitamente grandes como las variables cuyo valor crece indefinidamente” (Muñoz y Roman, 1999, p.21).

● Weierstrass (1815-1897) eliminó del lenguaje la ambigüedad presente en frases como una variable se acerca al límite, definió la continuidad en términos de $\varepsilon - \delta$, probó la existencia de máximo y mínimo, para una función continúa definida en un intervalo cerrado y demostró el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre el punto de acumulación (Muñoz y Roman, 1999).

Una vez finalizada la revisión histórica de este objeto matemático, se buscó una herramienta que permitiera realizar una revisión del currículo, encontrándose en los siguientes significados holísticos del límite determinados por el EOS, a través, de un análisis histórico epistemológico realizado por Contreras, García y Font, (2012), que considera 5 significados que son:

● **Gráfico**: corresponde a los aspectos relacionados con la representación gráfica de funciones relacionadas con el concepto de límite.

● **Geométrico:** se concibe el límite con referencia al axioma de continuidad y corresponde a la etapa de las entidades primarias, considerando situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentos y problemas semióticos.

● **Preinfinitesimal**: se razona utilizando aspectos relacionados con distancias infinitamente pequeñas.

● **Infinitesimal**: asociado a la aproximación numérica, obteniéndose el límite mediante sustituciones de la variable por el valor al cual tiende el límite.

● **Numérico:** se emplean tablas, dando valor a la variable independiente para obtener los valores de la variable dependiente.

En lugar de presentar el desarrollo de cada una de estas configuraciones, se consideró una síntesis de cada una con el propósito de incluirlas en el análisis de la presente investigación.

Este desarrollo histórico nos hace cuestionarnos de manera natural, qué tipo de configuraciones son recuperadas y con qué profundidad por las bases curriculares, por lo que hemos considerado presentar un análisis curricular.

2.3.2 Análisis curricular del concepto de límite de funciones

En la última modificación de los planes y programas por parte del Mineduc en Chile surgió el plan electivo del área B incluyendo matemática y ciencias, que contempla 4 posibles diferenciados en el área de matemática a ofertar en los establecimientos de educación media en el nivel de tercero y cuarto medio que son: (1) Límite, Derivadas e Integrales, (2) Probabilidades y Estadística Descriptiva Inferencial, (3) Pensamiento Computacional y Programación, (4) Geometría 3D. Cada diferenciado tiene una duración anual

El programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales se divide el contenido en 4 unidades que son: (1) Funciones, (2) Límite, (3) Derivadas y (4) Integrales, cada unidad contempla un objetivo de aprendizaje (OA) a desarrollar, el segundo objetivo se menciona:

> Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. (Mineduc, p. 42)

Para lograr que sus estudiantes desarrollen el objetivo anterior, el profesor debe: identificar los objetivos de aprendizaje, determinar las evidencias del mismo y planificar las actividades de aprendizaje que les planteará a sus estudiantes. Con lo anterior se evidencia la relación entre el diseño de tareas sobre el contenido de límite de funciones que debe tener un docente de enseñanza media en la asignatura de matemática.

2.3.3 Relación de los significados holísticos de límite de funciones en el currículo

En la tabla 1, se presenta un análisis curricular apoyado en las actividades (A1, A2, A3, A4) propuestas por el programa de estudio 3° o 4° medio, formación diferenciada, límite, derivadas e integrales, con respecto a los significados de límite determinados por el EOS desarrollado en el trabajo de Contreras et al., (2012).

Tabla 2 - 1*: Significado de límite presentes en el currículo*

Significado de límite	**Significado de límite presentes en el currículo (Mineduc, 2020)**
Gráfico	A1, A2, A3, A4
Geométrico	A1, A2, A3, A4
Preinfinitesimal	A2, A3, A4
Infinitesimal	A3, A4
Numérico	A1, A2, A3, A4

Actividades planteadas en el programa de formación Diferenciada de Límites, Derivadas e Integrales.

A1: Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma intuitiva y visual. Se comienza con patrones geométricos sencillos y la noción del último elemento de un patrón infinito.

A2: Los estudiantes argumentan sobre las posibilidades de acercarse al límite de una serie. La pregunta que orienta la actividad es si será posible que Aquiles alcance a la tortuga. Para contestar y extender una situación infinitamente en el tiempo, elaboran tablas y modelan la situación a fin de conjeturar y dar respuestas.

A3: Los estudiantes desarrollan el concepto de límite de sucesiones y series numéricas elaborando representaciones de ellas en la recta numérica y el sistema de coordenadas para proyectar y conjeturar hacia el infinito.

A4: Los estudiantes se aproximan a las nociones de lo infinitesimal y lo infinitamente grande. Ambos infinitos se pueden hallar en los números reales, que son la base de las actividades que se proponen. Entienden cómo se comportan las imágenes de una función cuando los elementos del dominio se aproximan infinitesimalmente a un número escogido.

Elaboran tablas, gráficos y cálculos describiendo cómo los elementos del dominio tienden al infinito positivo o negativo, y cómo esta aproximación los lleva a los términos de convergencia o divergencia de la función.

Al efectuar la revisión se encuentra que los significados: gráfico, geométrico y numérico se encuentran presentes en todas las actividades sugeridas, el preinfinitesimal en tres de ellas y el infinitesimal solo en dos de ellas, además, estos últimos dos significados se encuentran relacionados con todo un desarrollo previo vinculado a los significados previos, por lo que si se quieren implementar tal como están en el texto de estudio, no se logrará abordar con la profundidad necesaria para lograr la comprensión de todos los estudiantes, es necesaria una adecuación de los problemas sugeridos para que los estudiantes logren cumplir los objetivos propuestos.

Se presenta a continuación la revisión de las actividades presentes en el programa del diferenciado de límites de funciones, considerando la revisión histórica epistemológica realizada por (Bastías et al., 2021), donde se definen 6 significados parciales del concepto que límite de una función en una variable real, estos son:

- **EC1** (Los límites como aproximación en la matemática griega): se encuentra relacionada con el cálculo de volúmenes y áreas, además de magnitudes inconmensurables.
- **EC2** (Límites en la concepción de los indivisibles): surge en los siglos XVI y XVII debido la necesidad de resolver problemas concretos, se reconsideran y modifican los métodos infinitesimales, dando origen al cálculo infinitesimal.
- **EC3** (La noción intuitiva de límite en el cálculo infinitesimal de Newton): Newton recomienda un nuevo significado para los límites resolviendo problemas de física, utilizando los límites finitos para representar el carácter dinámico de las partículas.
- **EC4** (La idea de Leibniz sobre los infinitesimales): Leibniz desarrolló el aspecto filosófico de la matemática, su aporte principal fue la fundación del cálculo infinitesimal.
- **EC5** (Preconcepciones formales del límite): hace referencia al inicio del cambio de las preconcepciones de los límites a las concepciones formales de los mismos.

- **EC6** (La noción de límite de Weierstrass): contribuye a la aritmetización del cálculo al utilizar números reales (considerado como campo ordenado completo), se introduce la noción de límite lateral y convergencia.

En la tabla 2, se presenta un análisis curricular apoyado en las actividades (A1, A2, A3, A4) recomendadas por el programa de estudio 3° o 4° medio, formación diferenciada, límite, derivadas e integrales, con respecto a los significados parciales del concepto de límite de funciones determinados por el EOS desarrollado en el trabajo de Bastías et al., (2021).

Tabla 2 - 2*: Significado del concepto de límite de una variable real presentes en el currículo*

Significados del concepto de límite de una función de variable real.	**Actividades del Programa Diferenciado del Mineduc**
(EC1) Los límites como aproximación en la matemática griega	A1, A2, A3, A4
(EC2) Límites en la concepción de los indivisibles	A1, A2, A3
(EC3) La noción intuitiva de límite en el cálculo infinitesimal de Newton	A2, A3
(EC4) La idea de Leibniz sobre los infinitesimales	A1, A2, A3, A4
(EC5) Pre-concepciones formales del límite	A1, A2, A3, A4
(CE 6) La noción de límite de Weierstrass	A3, A4

Al finalizar la revisión se puede observar que los significados parciales presentes en todas las actividades del Mineduc son (EC1), (EC4) y (EC5), esto se justifica debido a que (EC1) es una forma que permite introducir a los estudiantes en el cálculo desde aspectos concretos que ellos ya conocen, es decir, permite al docente recuperar los conocimientos previos de los estudiantes para introducir un concepto nuevo, la (EC4) permite que los estudiantes transiten de lo concreto a lo nuevo al generar lo finito por procesos infinitos y la (EC5) representa el primer acercamiento a las definiciones formales del concepto de límite de una función, luego la (EC2) está presente en 3 de las actividades debido a su falta de simbología adecuada para representar los indivisibles que puede generar confusión en los estudiantes y la tanto (EC3) como la (EC6) están presente solo en 2 de las 4 actividades debido a que la 1° se encuentra relacionada con aspectos de física como velocidad, flujo o velocidad de flujo que no son el foco que busca promover el programa del Mineduc y la 2° debido a la dificultad que pueden tener los estudiantes para entender este significado parcial sin caer en la alegorización del concepto de límite de una función.

Tabla 2 - 3: Representaciones del concepto de límite de una variable real presentes en el currículo

Actividades del Programa del Diferenciado del Mineduc	Representaciones				
	Verbal	**Gráfica**	**Tabular**	**Icónica**	**Simbólica**
1. Comprendiendo los patrones infinitos					
1.1 En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, re-cortadas según un patrón.	x	x	x	x	x
1.2 La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.	x	x	x		x
1.3 La imagen muestra cinco "pilas" de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.	x	x	x		x
1.4 La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo de las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.	x	x	x		x
2. Comprendiendo la paradoja de Zenón					
2.1 Se considera las siguientes condiciones de la carrera: • La tortuga parte con 100 m de adelanto. • La tortuga y Aquiles parten de sus posiciones en el mismo instante. • Si Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ella ya avanzó 1/10 del recorrido de Aquiles. Por ejemplo: si Aquiles avanza por 10 m, la tortuga ya avanzó otra vez 1/10 del último recorrido de Aquiles. • Este proceso se repite iterada e infinitamente.	x		x		
2.2 Traspaso de la situación de intervalos discretos de tiempo al modelo continuo del tiempo.	x	x	x		x
3. Argumentando con la noción de límites en diferentes contextos					
3.1 Comprendiendo el concepto de límite.	x	x	x	x	x
3.2 ¿Qué entendemos por convergencia?	x	x	x		x
3.3 ¿Cómo calcular	x	x	x	x	x
3.3 ¿Cuándo no existe el límite de una sucesión?	x	x	x		x
3.4 Calculando áreas mediante la noción de límites	x	x	x		x
4. Argumentado la existencia de límites de funciones reales					
4.1 La imagen muestra el gráfico parcial de una función real f con f(x)=1+ 1/x.	x	x	x		x
4.2 Si se tiene una función f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, interesa saber qué sucede cuando x se acerca infinitesimalmente a un valor específico	x		x		x
4.3 Considera la función f(x) = cuando x tiende a -1.	x		x		x

En la Tabla 3 se puede observar que las representaciones presentes en todas las actividades son la: verbal, tabular y la simbólica, en cambio, la representación gráfica no está presente en 3 actividades y la icónica es la menos presente de todas las representaciones encontrándose nada más en 3 de las 14 actividades propuestas. Al realizar la revisión de los posibles motivos para esta disparidad en la presencia de las distintas actividades, encontramos que el método gráfico no está presente en aquellas actividades en las que podría generar confusión en los estudiantes, como aquellas donde se aplica o se debe aplicar el concepto de infinito y la representación icónica por su característica de representar cosas mediante una imagen o esquema espacial se utiliza en pocas actividades para evitar la confusión de los estudiantes a la hora de resolver los problemas planteados.

La revisión anterior motiva a plantear los siguientes cuestionamientos ingenuos: ¿cómo un profesor en formación puede determinar qué características o requisitos debe cumplir una situación matemática para que sea un problema de límite de funciones comprensible y desafiante para un grupo concreto de estudiantes?, y ¿Cómo modifican las tareas o problemas sobre límites de funciones presentes en los libros de texto los profesores de matemática en formación?

La presente propuesta de investigación se enmarca en la línea de investigación de formación de profesores de matemática, abarcando el diseño de tareas, a través de la modificación de los problemas presentes en los libros de texto.

2.4 Justificación y problemática de investigación

Como menciona Chevallard (1991) el concepto de transposición didáctica se refiere al paso del saber sabio al saber enseñado, mostrando que existe una distancia obligatoria que los separa. Por ello es necesario que el docente recapacite, tome distancia, interrogue las evidencias para lograr poner en palabras simples el objeto de estudio, ya que, para que la enseñanza de un saber sea posible, es necesario que sufra deformaciones que lo convertirán en apto para ser enseñado, el saber enseñado, en necesariamente diferente de aquel saber a enseñar. La transposición didáctica contempla ciertos principios como:

1) En todo proyecto de enseñanza–aprendizaje comienza con la identificación y designación de contenidos denominados saberes a enseñar.

2) Los saberes a enseñar en la mayoría de los casos preexisten a quien los designa como tales, pero en algunas ocasiones surgen como creaciones didácticas generadas por las necesidades de la enseñanza.
3) Un saber a enseñar debe adaptarse mediante transformaciones que lo hacen apta para designarse como objeto de enseñanza, “el trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado transposición didáctica” (Chevallard, 1991, p. 45).
4) La transposición didáctica es representada por el esquema objeto a saber, objeto a enseñar, objeto de enseñanza donde se realiza el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría y de lo reconstruido a lo construido.

En la presente investigación se busca observar cómo los profesores en formación ejecutan este proceso de transposición didáctica para adaptar el objeto matemático de límite de funciones del saber sabio (saber que se debe enseñar) al que ellos tuvieron su primera aproximación en la universidad, a un saber enseñado comprensible por estudiantes de enseñanza media. Se considera que las tareas que se diseñan forman parte de este proceso de transposición didáctica y en este caso interesa saber cómo estos profesores en formación modifican las tareas propuestas por el Mineduc en el programa del diferenciado de límites derivadas e integrales, para lograr el aprendizaje de todos los estudiantes.

2.5 Pregunta de Investigación

¿Qué criterios movilizan los profesores al rediseñar problemas sobre límites de funciones propuestos en libros de texto?, y ¿Cuál es el tipo de relaciones que se establecen entre estos y el conocimiento didáctico matemático puesto en juego?

2.6 Objetivos de Investigación

2.6.1 Objetivo General

Estudiar el tipo de relaciones que se establecen entre los criterios emergentes en el rediseño de problemas sobre límites de funciones en libros de texto y el conocimiento didáctico matemático que moviliza el profesor.

2.6.2 Objetivos específicos

- Identificar el tipo de tareas sobre límite de funciones presentes en los textos de estudio.
- Conocer el tipo de tareas sobre límites de funciones que privilegian los profesores.
- Analizar los criterios presentes en los rediseños de actividades sobre límites de funciones propuestas en los libros de texto.

3. MARCO TEÓRICO

La búsqueda de una práctica de la enseñanza matemática idónea es una problemática que ha interesado a investigadores, formadores de profesores y administraciones educativas e involucra determinar cuáles son los conocimientos matemáticos y didácticos que el profesor requiere para mejorar su práctica (Pino-Fan y Godino, 2015).

Uno de los primeros en poner este tema sobre la mesa fue Shulman (1986) quien entregó una perspectiva del conocimiento del profesor, clasificándose en tres categorías: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular. El primero de ellos hace referencia a que conocimientos posee el maestro y cómo los organiza en su estructura cognitiva; el segundo abarca las formas de representar y formular el tema que lo hacen comprensible para los demás y el tercero considera la gama completa de programas diseñados para la enseñanza y la variedad de materiales de instrucción disponibles.

Al año siguiente, Shulman (1987) amplió las tres categorías iniciales del conocimiento del profesor a siete, siendo estas: (1) conocimiento del contenido, (2) conocimiento pedagógico general, (3) conocimiento del currículo, (4) conocimiento pedagógico del contenido, (5) conocimiento de los alumnos y sus características, (6) conocimiento de los contextos educativos y (7) conocimiento de los fines, propósitos y valores educativos. Estas 7 categorías provienen de al menos 4 fuentes: (1) formación académica en la disciplina a enseñar, (2) la estructura y materiales educativos, (3) la investigación sobre escolarización, organizaciones sociales, aprendizaje humano, enseñanza y desarrollo y los fenómenos socioculturales que afectan el quehacer docente y (4) el conocimiento de la práctica.

Los descubrimientos de Shulman proporcionaron las bases para que Ball, Thames y Phelps (2008) desarrollaron el modelo denominado conocimiento matemático para la enseñanza, del inglés *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), es decir, el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñar matemática (mostrar a los estudiantes cómo resolver problemas, responder a sus preguntas y verificar su trabajo), incluyendo las tareas involucradas en la enseñanza y las exigencias matemáticas de esas tareas, lo que requiere un total conocimiento de plan de estudio. El

MKT se encuentra dividido en dos grandes categorías, en primer lugar, el conocimiento del contenido que incluye el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento en el horizonte matemático; en segundo lugar, se encuentra el conocimiento pedagógico del contenido que abarca el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo.

Al interior de la primera categoría podemos definir el conocimiento común del contenido como el conocimiento y la habilidad matemática utilizados en entornos distintos a la enseñanza, el conocimiento especializado del contenido como el conocimiento matemático y la habilidad exclusiva para la enseñanza y el conocimiento en el horizonte matemático consistente en entender cómo los contenidos matemáticos incluidos en el currículo están relacionados entre sí en un periodo de tiempo (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Al interior de la segunda categoría se encuentran el conocimiento del contenido y los estudiantes donde se combina entender matemática con familiarizarse con cómo piensan matemáticamente los estudiantes, es decir, los profesores deben anticipar lo que los estudiantes pueden comprender, aquello que los pueda confundir, lo que los motiva e interesa y deben saber interpretar las ideas matemáticas expresadas de forma incompleta; el conocimiento del contenido y la enseñanza en este apartado se hace referencia a que los docentes requieren una interacción entre la comprensión matemática y los problemas pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes, ya que al diseñar tareas necesitan saber elegir la secuencia que les permitirá a los estudiantes profundizar en la comprensión de los contenidos, y el conocimiento del currículo se refiere a la totalidad de los programas diseñados para la enseñanza de materias y temas en distinto nivel, las indicaciones del uso del plan de estudio, materiales, circunstancias y las relaciones entre ellos (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Al año siguiente Godino (2009) propone la idea inicial del modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM), este modelo se encuentra basado en el enfoque ontosemiótico (EOS) y consiste en un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didáctico que el profesor integra, organiza y entiende de los modelos descritos anteriormente. Aquí se mencionan dos tipos de herramientas, en primer lugar, las facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional; en segundo lugar, se mencionan los niveles de análisis: prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos, normas e idoneidad. El autor postula que estas nociones deben ser vistas como herramientas de análisis y reflexión de los procesos de enseñanza y que pueden ser usadas por los profesores para mejorar su propia práctica.

Más recientemente, Pino Fan-y Godino (2015), dan a conocer que para cada faceta y nivel de análisis se han elaborado y refinado nociones específicas que permiten observar de una forma más detallada las prácticas matemáticas y didácticas. El CDM interpreta y caracteriza los conocimientos del profesor considerando 3 dimensiones: (1) dimensión matemática, (2) dimensión didáctica y (3) la dimensión meta didáctico-matemática y lo divide en 2 subcategorías: (1) el conocimiento común del contenido, considerado como aquel conocimiento de un objeto matemático suficiente para resolver tareas del currículo en un nivel educativo determinado y (2) el conocimiento ampliado del contenido, considerado como aquel conocimiento que debe poseer el profesor sobre las nociones matemáticas que deben considerar aquello que está más allá de lo que se está estudiando en el currículo en un momento determinado, este conocimiento provee al profesor de las bases necesarias para plantear retos en el aula y vincular el objeto matemático en estudio con otras nociones matemáticas.

En Godino, Giacomode, Batanero y Font (2017) mencionan que, para resolver una tarea matemática, el profesor debe ser capaz de movilizar una diversidad de significados personales e institucionales, procedimientos distintos, justificaciones y explicaciones diversas o adaptadas a los conocimientos de los estudiantes.

En el artículo antes citado se mencionan las competencias didácticas específicas (capacidad de los profesores para abordar los problemas didácticos básicos presentes en la enseñanza) como: (1) la competencia de análisis de significados globales que abarca los significados de los objetos matemáticos involucrados en el estudio de un contenido determinado y cómo se articulan entre sí; (2) la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas que es la identificación por parte de docente de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas; (3) la competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas considerando las interacciones entre personas y recursos que se implementan en los procesos instruccionales y cómo gestionarlas para optimizar el aprendizaje; (4) La competencia de análisis normativo, es decir, las normas que condicionan el desarrollo de un proceso de instrucción, como son establecidas y como se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático; (5) la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, entendida, como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permitan calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación de los significados personales de los estudiantes a los significados institucionales pretendidos e implementados teniendo presente las circunstancias y recursos disponibles.

Godino y Neto (2013) plantean ejemplos prácticos de un acercamiento natural y progresivo a los criterios de idoneidad didáctica con base en las respuestas a preguntas que todo docente se realiza al reflexionar sobre los requerimientos de una buena clase de matemática, así este constructo surge natural desde la experiencia lo que genera una mayor compresión del mismo por parte de los profesores en ejercicio, constituyéndose como una herramienta de apoyo al diseño, implementación y evaluación de la práctica docente.

Pochulu et al., (2015) hicieron un proceso de instrucción para formadores de futuros profesores donde exploraron el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores para una enseñanza eficaz, considerando la caracterización de la competencia en análisis didáctico como el diseño, la aplicación y valoración de las secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad estableciendo ciclos de planificación, implementación, valoración y el planteamiento de propuestas de mejora. Los autores consideraron lo planteado por Font (2011) y Giménez y otros (2013), con respecto a que los constructos propuestos por el EOS denominado criterios de idoneidad resultan útiles para el desarrollo de esta competencia.

En la presente investigación se utilizan los criterios de idoneidad para establecer qué tan idóneos son los rediseños elaborados por los profesores en formación para la enseñanza del contenido de límite de funciones a estudiantes de tercero o cuarto año de enseñanza media en Chile.

3.1 Criterios de idoneidad didáctica

La presente investigación también se apoya en los criterios de idoneidad didáctica del enfoque ontosemiótico (EOS), ya que busca responder de forma parcial a las interrogantes: (1) "¿Qué criterios se deben usar para diseñar una secuencia de tareas que permita evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos?, y (2) ¿Qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia?" (Hummes, Breda, Seckel y Font, 2020, p.4).

Los criterios de idoneidad se clasifican según las facetas que debe tener presente un docente en su quehacer de enseñanza para lograr un aprendizaje idóneo en sus estudiantes. Según Godino (2009) los criterios de idoneidad se pueden definir:

1) **Idoneidad epistémica**, entrega una valoración de las matemáticas que están siendo enseñadas.

2) **Idoneidad cognitiva**, permite determinar antes de la clase si lo que se pretende enseñar es alcanzable por lo que los estudiantes saben y al finalizar si lo adquirido se encuentra cerca de lo que se pretendía enseñar.

3) **Idoneidad interaccional**, permite evaluar si las interacciones que ocurren en el aula permiten resolver las dudas y dificultades que podrían tener los estudiantes.

4) **Idoneidad mediacional**, busca apreciar si los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción se adecuaron a las necesidades de los estudiantes.

5) **Idoneidad emocional**, valorará los intereses y motivaciones de los estudiantes durante el proceso de instrucción.

6) **Idoneidad ecológica**, permite verificar si la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del establecimiento, a las directrices curriculares, y al contexto entorno social y profesional.

3.1.1 Componentes e indicadores de los Criterios de Idoneidad

Para lograr hacer operativos los Criterios de idoneidad didáctica, es necesario, tener un conjunto de indicadores observables que permitan valorar el grado de idoneidad de cada criterio, a continuación, se muestra una breve definición de cada criterio relacionándolo con la pregunta que busca resolver, para luego dar a conocer los indicadores que se emplean para valorar los rediseños de los profesores que han sido mencionados en Breda y Lima (2016), Seckel (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda et al., (2018) y fueron diseñados para valorar un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

3.1.1.1 Idoneidad epistémica

Toma como referencia las matemáticas institucionales, además del currículo vigente para establecer si las matemáticas enseñadas son unas "buenas matemáticas" (Godino et al., 2006; Godino et al., 2007; Godino et al., 2009; Godino 2009), buscando responder a la interrogante: ¿He enseñado unas matemáticas de calidad?.

Tabla 3 - 4*: Componentes e indicadores de Idoneidad epistémica*

Idoneidad epistémica	
Componentes	**Indicadores**
Errores	• No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	• No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas.
Riqueza de procesos	• La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	• Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (contemplada en el currículo). • Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. • Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. • Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica (Font, 2014, p.1; Seckel 2016, p. 176; Breda y Lima, 2016, p. 80).

3.1.1.2 Idoneidad Cognitiva

Considera la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos e implementados expresando el grado en que los aprendizajes pretendidos e implementados se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes (Godino et al., 2006; Godino et al., 2007; Godino et al., 2009; Godino 2009), buscando responder a la interrogante: ¿Han aprendido los estudiantes con las tareas propuestas?.

Tabla 3 - 5*: Componentes e indicadores de Idoneidad cognitiva*

Componentes	**Indicadores**
Conocimientos previos	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	• Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	• Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intramatemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.). • Promueve procesos metacognitivos.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica (Font, 2014, p.2; Seckel, 2016, p. 177; Breda y Lima, 2016, p. 81).

3.1.1.3 Idoneidad Interaccional

Se refiere a las interacciones en el aula que permiten identificar y resolver obstáculos en los significados, favoreciendo la autonomía de los estudiantes en su propio aprendizaje (Godino et al., 2006; Godino et al., 2007; Godino et al., 2009; Godino 2009), se busca responder a la pregunta ¿He realizado una gestión adecuada de la interacción en la clase que ha permitido resolver las dificultades de los alumnos?.

__Tabla 3 - 6__: Componentes e indicadores de Idoneidad interaccional

Idoneidad Interaccional	
Componentes	**Indicadores**
Interacción docente discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.). • Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.). • Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica (Font, 2014, p.2; Seckel, 2016, p. 177; Breda y Lima, 2016, p. 81).

3.1.1.4 Idoneidad Mediacional

Se refiere a la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y de tiempo que se necesitan para el desarrollo efectivo del proceso de enseñanza – aprendizaje de todos los estudiantes (Godino et al., 2006; Godino et al., 2007; Godino et al., 2009; Godino 2009), se busca responder a la pregunta ¿He utilizado los recursos temporales, materiales, TIC, etc. adecuados?.

__Tabla 3 - 7__: Componentes e indicadores de Idoneidad mediacional

Idoneidad Mediacional	
Componentes	**Indicadores**
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, computadores)	• Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.

	• El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). • El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje)	• Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). • Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. • Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica (Font, 2014, p.3; Seckel 2016, p. 178; Breda y Lima, 2016, p. 82).

3.1.1.5 Idoneidad Emocional

Se refiere a los afectos, al grado de motivación e interés que se logra en los estudiantes durante el proceso de enseñanza aprendizaje (Godino et al., 2006; Godino et al., 2007; Godino et al., 2009; Godino 2009), se busca responder a la interrogante: ¿Las tareas y su gestión promueven la implicación de los alumnos?.

Tabla 3 - 8*: Componentes e indicadores de Idoneidad emocional*

Idoneidad Emocional	
Componentes	**Indicadores**
Intereses y necesidades	• Selección de tareas de interés para los alumnos. • Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica (Font, 2014, p.4; Seckel 2016, p. 177; Breda y Lima, 2016, p. 83).

3.1.1.6 Idoneidad Ecológica

Se refiere al grado en que la ha realizado la adaptación del proceso de enseñanza-aprendizaje al: proyecto educativo de la institución, currículo, el contexto de los estudiantes, entre otros (Godino et al., 2006; Godino et al., 2007; Godino et al., 2009;

Godino 2009), buscando responder la siguiente pregunta: ¿Los contenidos se corresponden con el currículum y son útiles para su inserción social y laboral?.

***Tabla 3 - 9**: Componentes e indicadores de Idoneidad ecológica*

Idoneidad Ecológica	
Componentes	**Indicadores**
Adaptación al currículo	• Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extramatemático o bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	• Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica (Font, 2014, p.4; Seckel 2016, p. 177; Breda y Lima, 2016, p. 83).

Según el EOS una buena clase se logra cuando existe un equilibrio entre los diferentes criterios de idoneidad, pues si se busca favorecer alguna de ellos se puede lograr generar una clase con buenas matemáticas en un tiempo razonable, pero sin preocuparse por conseguir el aprendizaje de todos los estudiantes o al disminuir el nivel de la clase se puede conseguir el aprendizaje de todos los estudiantes (Seckel, 2016).

4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

4.1 Introducción

Esta investigación busca establecer cómo 10 profesores en formación participantes rediseñan una de las cuatro actividades propuestas en el programa de estudio del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales vigente a partir del año 2020.

Para lograr el punto anterior, esta investigación se apoya en las actividades rediseñadas por los profesores en formación y algunas transcripciones seleccionadas de las grabaciones generadas a partir de:

1) El análisis crítico de planificación de una profesora en ejercicio, buscando identificar los elementos importantes que consideran los profesores en formación para la implementación de una clase y conocer su reflexión sobre una planificación implementada sobre el concepto de límite de funciones.

2) La elaboración y presentación de los rediseños realizada por los profesores en formación, buscando que los participantes en parejas: elaboren un rediseño, presenten su rediseño en gran grupo y realicen la revisión del mismo, implementando mejoras si lo estiman pertinente.

3) La entrevista semiestructurada efectuada a los profesores en formación, buscando establecer que criterios de idoneidad priorizan los profesores al efectuar la crítica a la clase realizada por la profesora en ejercicio y contrastarlos con los criterios de idoneidad que ellos promueven cuando realizan sus rediseños de la actividad propuesta para finalmente conocer los motivos de su diseño o rediseño mediante la entrevista semiestructurada.

4.2 Tipo de metodología y diseño metodológico

En la presente investigación se utilizó una metodología cualitativa descriptiva e interpretativa, apoyada en un diseño de carácter fenomenológico, donde la recolección de datos se hizo a través de actividades guiadas, grupos de discusión y entrevistas.

La investigación cualitativa busca la comprensión de los fenómenos considerando el punto de vista de los participantes en un ambiente natural relacionado con su contexto, mientras que el carácter descriptivo se usa cuando existen en la literatura piezas o trozos de teoría con apoyo empírico moderado, es decir, existen variables que actúan como fundamentos del estudio y se pueden agregar otras, mientras que el carácter interpretativo se centra en entender el significado de las acciones de los seres los humanos y sus instituciones (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El carácter fenomenológico, según Taylor y Bogdan (1984) intenta ver las cosas desde el punto de vista de las personas, por esta razón los investigadores que emplean esta metodología deben aprender a interpretar la conducta humana, lo que la gente dice y hace, ya que estas acciones definen su mundo. Aquí "el investigador identifica la esencia de las experiencias humanas en torno a un fenómeno de acuerdo a como lo describen los participantes del estudio" (Creswell, 2003, p.15).

Para Creswell (2013b), Mertens (2010) y Álvarez-Gayou (2003), el diseño fenomenológico se fundamenta en las siguientes premisas:

- Se pretende describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva construida colectivamente.
- Se basa en el análisis de discursos y temas, así como en la búsqueda de sus posibles significados.

Se puede inferir que el carácter fenomenológico se fundamenta en dar respuesta a una interrogante como: ¿Cuál es el significado de una experiencia vivida por una persona, grupo o comunidad en relación con un fenómeno determinado?. Para dar respuesta a la interrogante planteada es necesario: (1) identificar el fenómeno, (2) recopilar los datos y (3) desarrollar una descripción compartida de la experiencia (Hernández et al., 2010).

1) **Identificación del fenómeno:** nos interesa mirar el rediseño de tareas sobre límites de funciones propuestas en los libros de texto; cuando se trabaja dentro de la reflexión de la práctica inicial docente en gran grupo.

2) **Recopilación y el tratamiento de los datos:** la recopilación de la información se realizó apoyados en las videograbaciones de las sesiones de discusión de la práctica docente, los registros en documentos que evidencia estos rediseños, las bitácoras de clase y todo aquel insumo que nos permita establecer una narrativa del fenómeno a explorar. Mientras la recopilación de los datos se apoya en la extracción de unidades de análisis propuestas emergentes de los referentes teóricos.

3) **El desarrollo de una descripción compartida de la experiencia**: se pretende a partir del establecimiento de relaciones apoyado en una inducción analítica, donde se efectuará una codificación emergente del análisis de contenido.

4.3 Participantes del estudio (sujetos de estudio)

La investigación se encuentra situada en los profesores en formación de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Los Lagos, por lo que los sujetos de estudio son 10 estudiantes de séptimo semestre de la Universidad de Los Lagos de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación quienes compartieron sus datos de forma voluntaria. Los profesores en formación fueron seleccionados por conveniencia, ya que era el grupo de estudiantes a los cuales se tenía acceso.

4.4 Contexto de implementación

La introducción al rediseño de tareas y las actividades planteadas por los profesores de matemática en formación se efectuaron desde la virtualidad en la asignatura de Metodología de la investigación que fue impartida el año 2021, se realizaron intervenciones una vez a la semana durante los meses de abril, mayo, junio y julio para su implementación.

4.5 Instrumentos para la recolección de datos

Los instrumentos elaborados y validados mediante triangulación de expertos, saturación teórica y triangulación de contenido son:

1) Propuestas de actividades para el rediseño de tareas de final abierto desarrolladas por el profesor en formación, apoyado en los significados del objeto matemático límite de funciones.

2) Selección y propuesta a los profesores de matemática en formación de problemas del programa de estudio 3° o 4° medio, formación diferenciada, límite, derivadas e integrales y de otros textos disponibles que contengan el objeto matemático de límite para su rediseño.

3) Protocolo de entrevista semiestructurada a los profesores de matemática en formación.

Se solicitó las grabaciones de las discusiones realizadas por los profesores en formación que posteriormente fueron transcritas en los siguientes momentos:

a) Cuando los equipos de trabajo presentan su rediseño

b) Cuando los equipos de trabajo discuten su rediseño con el resto de los equipos formados.

c) Cuando los equipos de trabajo responden las preguntas de la entrevista semiestructurada.

4.6 Fases del estudio

4.6.1 Fase 1: Análisis del Programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales

1) *Identificar el tipo de tareas* que contiene (se puede profundizar en sección 2.3.3 denominada relación de los significados holísticos de límite de funciones en el currículo).
2) *Identificar los significados* de límite que promueve (se puede profundizar en sección 2.3.2 denominada análisis curricular del concepto de límite de funciones):

   a. Considerando los significados de límite determinados por el EOS desarrollado en el trabajo de Contreras, et al., (2012).

   b. Considerando los significados parciales del concepto de límite de funciones mencionados en el trabajo de Bastias et al., (2021).

3) *Seleccionar la actividad* que se solicitará a los profesores en formación rediseñar de las cuatro propuestas por el ministerio de educación en el programa del diferenciado.

4.6.2 Actividad entregada a los profesores en formación para su rediseño

A continuación, se presenta la actividad seleccionada del programa de estudio 3° o 4° medio, Formación Diferenciada de Matemática, Límites, Derivadas e Integrales (páginas 82 a 86).

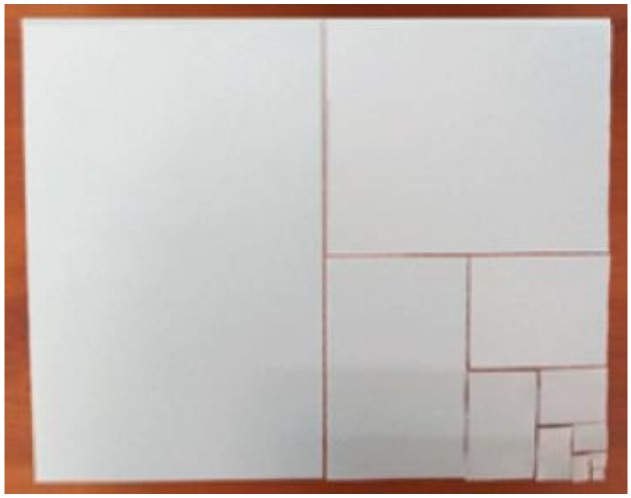
Actividad 1: Programa de estudio 3° o 4° Medio, Formación Diferenciada Matemática
Límites, Derivadas e Integrales

Nombre	Representando el límite de sucesiones en contextos geométricos.
Descripción	Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma intuitiva y visual. Se comienza con patrones geométricos sencillos y la noción del último elemento de un patrón infinito. Se espera que, al hacer conjeturas sobre el límite, reconozcan que un error es una posibilidad que se puede discutir y sirve a todos para aprender. Además, podrán resolver los problemas utilizando las herramientas digitales o de conocimientos que estén a disposición.
OA 2	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.
OA d	Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
OA g	Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
Actitudes	Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
Duración	12 horas pedagógicas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

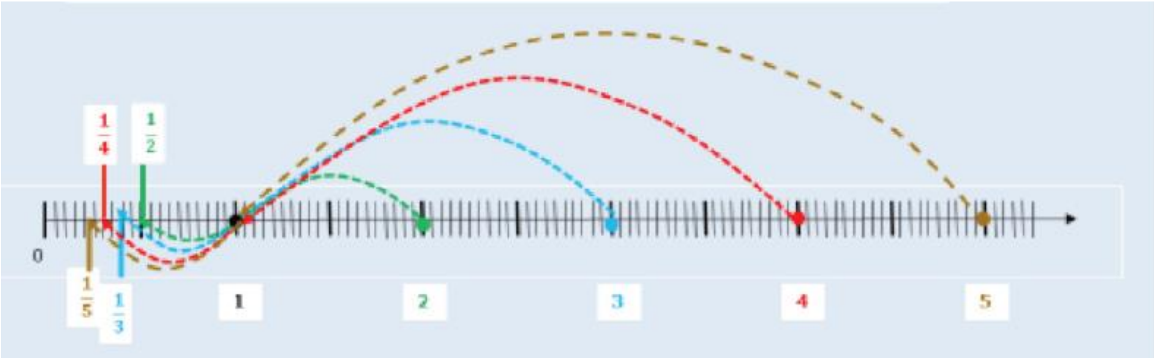
COMPRENDIENDO LOS PATRONES INFINITOS

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



a. ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
b. Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
c. Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el "último elemento" de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?.
d. Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el "último elemento" de la sucesión.
e. ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?.
f. ¿Qué relación puedes ver entre "sin alcanzar", el "infinito" y los números naturales?.
g. Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
h. ¿Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.
i. ¿Qué ocurre con el "último elemento" en este caso?.

2. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.



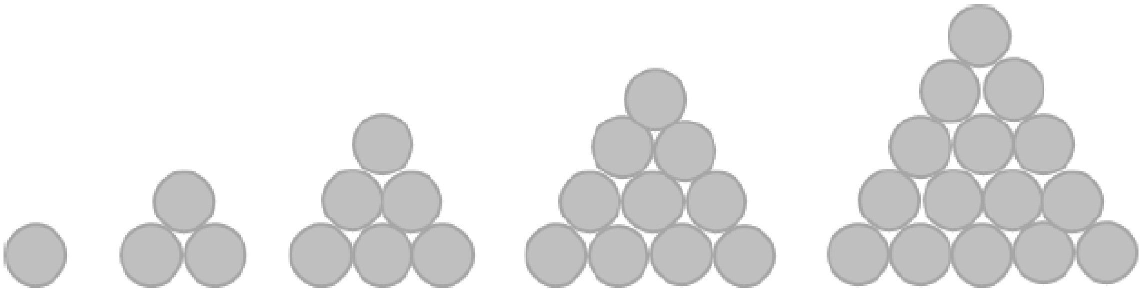
a. ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?.

b. Elabora algebraicamente el término general (funcional de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$), que modela esta transformación.

c. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?.

d. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

3. La imagen muestra cinco "pilas" de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



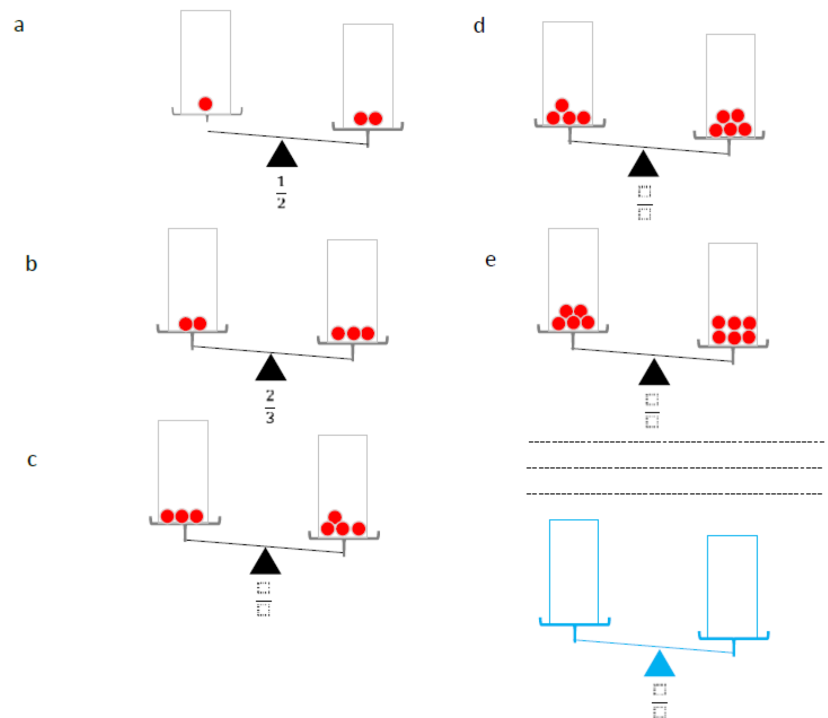
a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?

b. Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.

c. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?

d. Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar "el último valor".

4. La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.



a. Describe verbalmente a tu compañero un patrón según el cual se irían llenando ambos platos de la balanza.
b. Escribe un patrón según el cual se forman las fracciones que representan la razón entre la cantidad de las bolitas del plato izquierdo y del plato derecho.
c. ¿Cuál podría ser el término n-ésimo? Escribe la fracción de la balanza en enésima posición dibujada en azul.
d. ¿Cuál es el valor al que tienden a llegar todos los elementos de la sucesión de las fracciones?
e. ¿Qué valor no pueden superar los elementos de la sucesión?
f. Siguiendo infinitamente el mismo procedimiento de llenar las balanzas, ¿alcanzarán el equilibrio en algún momento? Explica a tu compañero lo que piensas.
g. Manteniendo la misma cantidad de bolitas e invirtiendo los platos del lado izquierdo con el derecho, ¿cuál es la diferencia con la sucesión anterior?
h. Elabora el término general de la nueva sucesión.
i. ¿A qué número tienden los elementos de esta sucesión?
j. ¿Se pondrá en algún momento la balanza en equilibrio? Explica tu respuesta a un compañero.
k. Grafica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano y explica utilizando el gráfico.

4.6.3 Fase 2: Solicitud a los profesores en formación de la realización de un Análisis crítico de la planificación de una profesora en ejercicio

1) *Identificar los elementos importantes que consideran los profesores en formación para la implementación de una clase*, acá los profesores indican que consideran importante en la implementación de una clase de matemática, reflexión libre.

2) *Reflexionar sobre una planificación implementada*, para ello se solicita a los profesores en formación la reflexión sobre la planificación de una clase de un profesor en ejercicio en modalidad virtual y presencial sobre la introducción al concepto de límite de una función, con apoyo de Hummes et al., (2020).

4.6.4 Fase 3: Solicitud a los profesores en formación de la realización de un rediseño de la propuesta ministerial

1) *Elaborar un rediseño*, se solicita a los profesores en formación que elaboren un rediseño en parejas (La actividad que se les entregó a los profesores en formación se puede revisar en el anexo A).

2) *Discutir un rediseño en gran grupo*, se realiza una discusión en gran grupo de los rediseños realizados.

3) *Revisión de un rediseño*, se solicita a los profesores en formación que corrijan sus rediseños considerando las opiniones de sus compañeros.

4.6.5 Fase 4: Realización de una entrevista semiestructurada

Buscando responder la interrogante: ¿Por qué los profesores en formación priorizan la idoneidad didáctica de unas facetas sobre otras al diseñar y rediseñar problemas sobre límite de funciones?, luego que los profesores en formación hicieron, presentaron y entregaron sus rediseños, se efectúa una entrevista semiestructurada a cada grupo de trabajo, las preguntas generales de la entrevista se encuentran en el Anexo C y las respuestas en el Anexo D.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 Introducción

Para efectuar el análisis de los resultados se efectuó una codificación de los profesores en formación participantes de la investigación, como se solicitó que las actividades se desarrollaran en parejas, se considera este aspecto en los códigos considerando el código G para grupo y el A para alumno (por alumno hacemos referencia al profesor en formación).

- Grupo 1 (G1): Alumno 1 (A1) y Alumno 2 (A2)
- Grupo 2 (G2): Alumno 3 (A3) y Alumno 4 (A4)
- Grupo 3 (G3): Alumno 5 (A1) y Alumno 6 (A6)
- Grupo 4 (G4): Alumno 7 (A7) y Alumno 8 (A8)
- Grupo 5 (G5): Alumno 9 (A9) y Alumno 10 (A10)

Al revisar los rediseños elaborados por los profesores en formación se establecieron 3 categorías:

1) Rediseño a *Profundidad*
2) Rediseño *Moderado*
3) Rediseño *Incipiente*

En la tabla 10 se efectúa una comparación de la actividad entregada a los profesores en formación extraída del programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales con los rediseños elaborados por los profesores en formación, aquí se puede observar que muchas de las actividades fueron **eliminadas**, **transcritas (T)**, **modificadas (M),** estos criterios fueron utilizados para realizar la categorización antes mencionada.

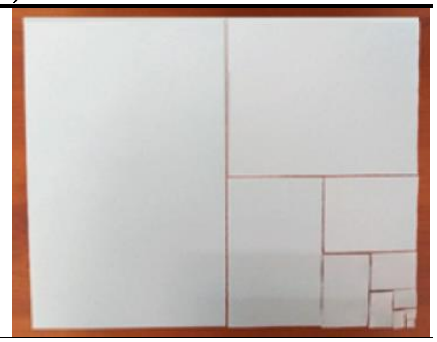
Se consideró que los profesores en formación que efectuaron un rediseño *Incipiente* fueron aquellos que eliminaron actividades por considerarlas repetitivas o muy similares entre sí, o modificaron 5 o menos de los apartados sugeridos en la actividad seleccionada, y que los profesores que modificaron más de 5 de los apartados sugeridos y además incorporaron actividades previas o extras a la actividad sugerida en 2 o más ítems de los entregados en la actividad sugerida fueron categorizados en un rediseño *Moderado*. Finalmente, los profesores en formación que incorporaron actividades previas distintas a las sugeridas fueron categorizados en un rediseño a *Profundidad*.

Tabla 4 - 10: *Comparación de las modificaciones efectuadas por los grupos que no realizaron un rediseño a profundidad en las actividades propuestas.*

Comprendiendo los patrones infinitos

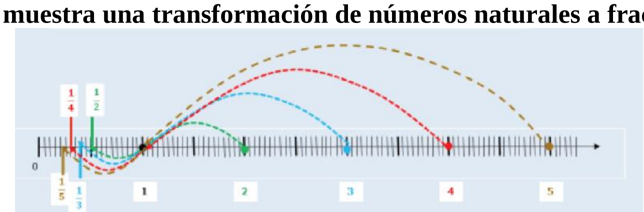
Tiempo (12 horas pedagógicas)

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



Preguntas presentes en Actividad 1 del Programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales.	**G1** A1 y A2	**G2** A3 y A4	**G4** A7	**G4** A8	**G5** A9 y A10
Actividad Previa o Extra	**no**	**si**	**no**	**si**	**no**
1. a) ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.	T	M	T	M	T
1. b) Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso n = 1)	T	T	T	M	T
1. c) Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el "último elemento" de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?	T	T	T	M	T
1. d) Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el "último elemento" de la sucesión.		T	T		T
1. e) ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?		T	T	M	T
1. f) ¿Qué relación puedes ver entre "sin alcanzar", el "infinito" y los números naturales?		T	T		T
1. g) Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.		T	T	M	T
1. h) Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.		T	T		T
1. i) ¿Qué ocurre con el "último elemento" en este caso?	T	T	T		T

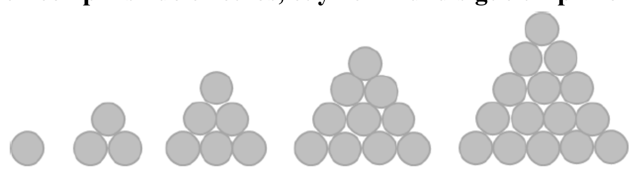
2. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.



Preguntas presentes en Actividad 1 del Programa del diferenciado límites, derivadas e integrales.	**G1** A1 y A2	**G2** A3 y A4	**G4** A7	**G4** A8	**G5** A9 y A10
Actividad Previa o Extra	**no**	**si**	**no**		**si**

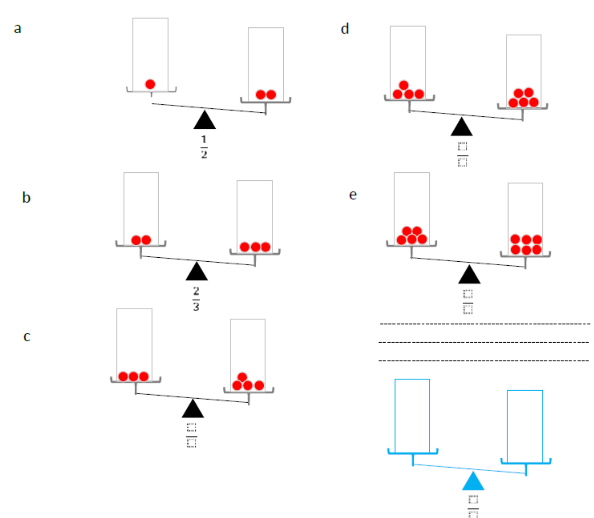
2. a) ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?	T	T	T		T
2. b) Elabora algebraicamente el término general (funcional de ℕ en ℚ), que modela esta transformación.	T	T	T		T
2. c) ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?	T	T	T		M
2. d) Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.	T	M	T		T

3. La imagen muestra cinco “pilas” de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



Preguntas presentes en Actividad 1 del Programa del diferenciado límites, derivadas e integrales.	**G1** A1 y A2	**G2** A3 y A4	**G4** A7	**G4** A8	**G5** A9 y A10
Actividad Previa o Extra	**no**	**no**	**no**	**si**	**si**
3.a) ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?	T	T	T	T	M
3.b) Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.	T	M	T	M	M
3.c) ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?	T	T	T	T	M
3.d) Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar “el último valor”.	T	T	T	M	M

4. La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.



Preguntas presentes en Actividad 1 del Programa del diferenciado límites, derivadas e integrales.	**G1** A1 y A2	**G2** A3 y A4	**G4** A7	**G4** A8	**G5** A9 y A10
Actividad Previa o Extra	no	no	no	no	

4.a) Describe verbalmente a tu compañero un patrón según el cual se irían llenando ambos platos de la balanza.	T	T	T	T
4.b) b. Escribe un patrón según el cual se forman las fracciones que representan la razón entre la cantidad de las bolitas del plato izquierdo y del plato derecho.	T	T	T	T
4. c) ¿Cuál podría ser el término n-ésimo? Escribe la fracción de la balanza en enésima posición dibujada en azul.		T	T	T
4.d) ¿Cuál es el valor al que tienden a llegar todos los elementos de la sucesión de las fracciones?		T	T	T
4.e) ¿Qué valor no pueden superar los elementos de la sucesión?	T	T	T	T
4.f) Siguiendo infinitamente el mismo procedimiento de llenar las balanzas, ¿alcanzarán el equilibro en algún momento? Explica a tu compañero lo que piensas.		T	T	T
4.g) Manteniendo la misma cantidad de bolitas e invirtiendo los platos del lado izquierdo con el derecho, ¿cuál es la diferencia con la sucesión anterior?	T	T	T	T
4.h) Elabora el término general de la nueva sucesión.		T	T	T
4.i) ¿A qué número tienden los elementos de esta sucesión?		T	T	T
4.j) ¿Se pondrá en algún momento la balanza en equilibrio? Explica tu respuesta a un compañero.		T	T	T
4.k) Grafica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano y explica utilizando el gráfico.		M	T	T

Resumiendo, la categorización anterior se observó que:

1) Rediseño a *Profundidad*: fue efectuado solo por el G3 (A5 y A6)
2) Rediseño *Moderado*: fue efectuado por los grupos G4(A8) y G5(A9 y A10)
3) Rediseño *Incipiente*: fue efectuado por los grupos: G1 (A1 y A2), G2 (A3 y A4) y G4(A7).

A continuación, se presenta el análisis crítico a cada tipo de rediseño efectuado, aludiendo en cada caso a: 1) Análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio versión escrita, 2) Presentación en gran grupo del análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio, 3) Propuesta de rediseño, 4) Entrevista semiestructurada.

5.2 Rediseño en *Profundidad*

En este rediseño se considera que, se contempla la necesidad de modificar las situaciones problema, invitando a ir más allá de lo solicitado por el Mineduc. Y principalmente moviliza la necesidad de generar en el estudiante la capacidad de actuar críticamente.

5.2.1 Análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio versión escrita

En la tabla 11 se evidencian las menciones de los profesores en formación que efectuaron un rediseño a *Profundidad* con referencia a cada criterio de idoneidad en el análisis crítico a la planificación de un profesor en ejercicio en su versión escrita.

Tabla 5 - 11: *Rediseño a Profundidad, referencias a los criterios de idoneidad en el análisis crítico, versión escrita.*

Grupo	Planificación presencialidad (4° medio)	Planificación en virtualidad (3° medio)
G3 (A5 y A6)	**Epistémica (1)** Riqueza de proceso **Cognitiva (1)** Conocimientos previos **Interaccional (1)** Interacción docente-discente **Mediacional (1)** Recursos, **Ecológica (1)** Adaptación al currículo	**Epistémica (1)** Riqueza de proceso **Cognitiva (1)** Conocimientos previos **Interaccional (1)** Interacción docente-discente **Mediacional (1)** Recursos, **Ecológica (1)** Adaptación al currículo

Los profesores en formación al hacer el análisis crítico de las planificaciones de tercero y cuarto medio de la profesora en ejercicio hacen referencia solo una vez a los criterios de idoneidad: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional y ecológica. Pero no mencionan la idoneidad emocional.

5.2.2 Presentación en gran grupo del análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio

En la tabla 12 se puede observar la transcripción de la videograbación de la presentación realizada por el grupo de análisis crítico realizado a las planificaciones de la profesora en ejercicio sobre el contenido de límite de funciones, especificando en qué puntos se centran los profesores en formación al realizar esta exposición de su trabajo.

***Tabla 5 - 12**: Rediseño a Profundidad, transcripción de la presentación realizada por el grupo sobre el análisis crítico de la planificación de una profesora en ejercicio.*

grupo	Comentario (transcripción fiel)	Análisis
G3 (A5 y A6)	A5: Creemos que están especificadas las actividades y el contenido a tratar A5: Creemos en base a la planificación y a las actividades que planteó la profesora que, si va a existir alguna interacción, porque por ejemplo en los ppt no aparecen desarrollados los ejercicios y eso más allá de que la profesora los desarrolle en clase, si va a haber un espacio en el que pueda participar el estudiantado. A5: Una dificultad que tuvimos fue como encontrar la idoneidad epistémica dentro de las planificaciones…creemos que no está presente dentro de las planificaciones, porque no señala los errores o las ambigüedades que pueden presentar los estudiantes.	Está presente la Interacción docente-discente, es decir, el profesor hace una adecuada presentación del tema y se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos. Se encuentra presente la riqueza de procesos, ya que la secuencia de tareas contempla la realización de actividades relevantes como modelización, argumentación, resolución de problemas.

En la presentación los profesores en formación enfatizan en la interacción docente – discente, perteneciente a la idoneidad interaccional evidenciando que manejan el concepto que quieren destacar y también enfatizan la ausencia de evidencia en la planificación de la profesora en ejercicio de la idoneidad epistémica, también mostrando que manejan el concepto al cual hacen referencia. Aquí tampoco mencionan de la presencia o ausencia de la idoneidad emocional.

5.2.3 Propuesta de rediseño

En el rediseño a *profundidad* efectuado por G3 (A5 y A6) se evidencia que los profesores en formación cambiaron los problemas sugeridos por otros que se adaptaran mejor a la forma de trabajo que ellos buscaban implementar, creando una secuencia didáctica de tres problemas con un nivel creciente de dificultad.

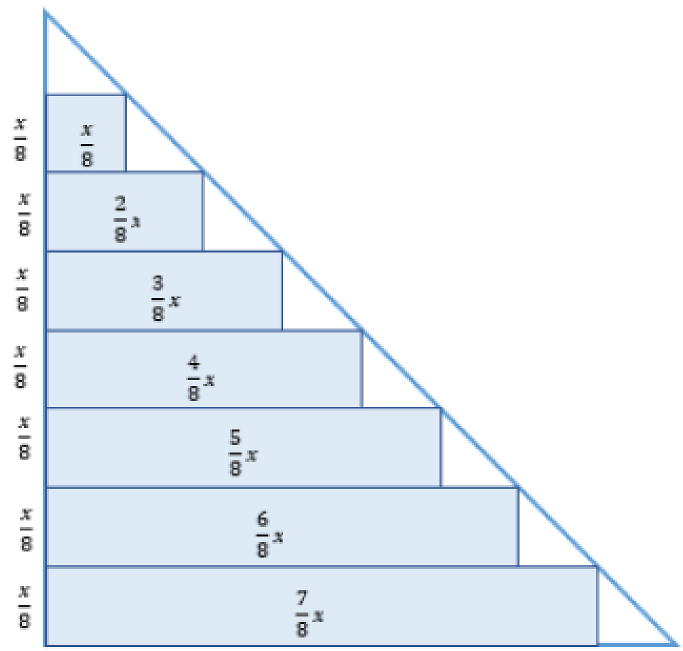
Para comenzar su actividad eligieron un problema presente en la A3 del programa de límites, derivadas e integrales denominado: argumentando con la noción de límites en diferentes contextos, el que les permitía realizar la conexión de la noción de área conocida por los estudiantes con el concepto nuevo de límite de funciones:

Se comenzó dando una indicación general que no estaba en el plan y programa donde incorporan el uso de la tecnología que estaba ausente en la actividad sugerida.

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas leyendo cuidadosamente los enunciados e indicaciones. Puedes acudir a los computadores del establecimiento solicitados para realizar cálculos y ver mejor los gráficos de las funciones.

Luego dan a conocer el enunciado de la primera pregunta, adaptándolo para que se entienda mejor la instrucción, además de reducir los ítems presentes en la pregunta original que eran 9 a 5 en su rediseño.

1. La imagen muestra un triángulo rectángulo isósceles de catetos x (el grande). Expliquen qué entienden de la imagen.



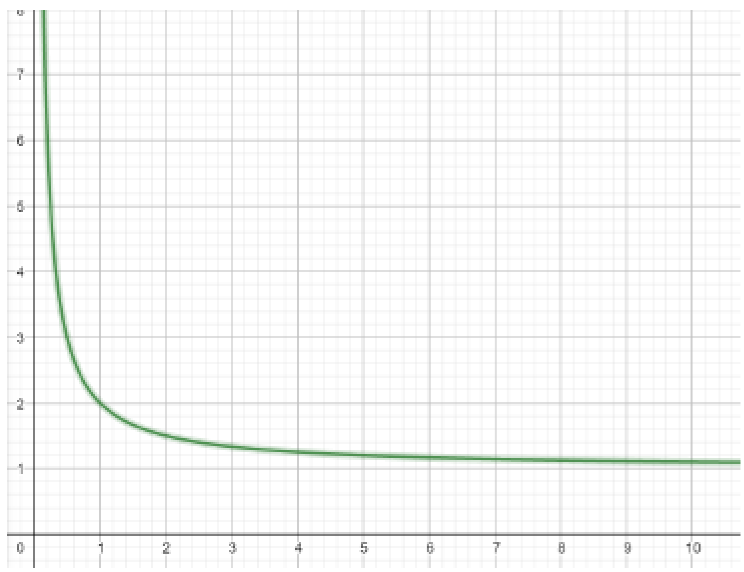
a) ¿Cuál es la expresión algebraica del área de este triángulo?
b) La imagen muestra una aproximación inferior mediante rectángulos del ancho $\frac{x}{8}$. Determinen la suma de todos los rectángulos y comparen con la expresión del área del triángulo.
c) ¿Qué porcentaje del área total se ha alcanzado con esta aproximación inferior de la subdivisión de la altura en $\frac{x}{8}$?
d) ¿Qué aproximación será una subdivisión en $\frac{x}{10}$?
e) Determinen el límite $\lim_{n\to\infty} A_n$ y comparen con la expresión algebraica del triángulo elaborada en a. (Notar que $A_n = \frac{x^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 3 \cdot \frac{x^2}{n^2} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{x^2}{n^2}$).

Acompañada de las instrucciones los profesores en formación explican que primero se les solicita que los estudiantes lean el problema de manera individual, luego se les pregunta si recuerdan los significados de los términos presentes en la actividad, estos puntos indican que se tiene presente la importancia de relacionar los conocimientos previos con los nuevos para así lograr un aprendizaje significativo de los estudiantes.

Para continuar su rediseño, los profesores en formación eligieron un problema presente en la A4 del programa de límites, derivadas e integrales denominada: Argumentado la existencia de límites de funciones reales, el que les permite relacionar el límite trabajado en la actividad anterior con el concepto de infinitesimal (infinitamente grande).

En esta pregunta los ítems fueron reducidos de 6 presentes en la actividad original a 4 en el rediseño.

2. La imagen muestra el gráfico parcial de una función real f con $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, que es la suma de una función constante k con $k(x) = 1$ y la función g con $g(x) = \frac{1}{x}$.



a. Avanzando en el eje X, es decir, cuando $x \to \infty$, ¿a qué número tienden los valores $f(x)$?. Explica tu respuesta desde el gráfico.
b. La función f es la suma de las funciones k y g. Si se considera el avance $x \to \infty$, ¿a qué valor tienden $k(x)$ y $g(x)$? Explica la respuesta utilizando el gráfico.
c. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿existe un número al cual tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta a un compañero, utilizando el gráfico.
d. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿a qué recta se acerca infinitamente el gráfico de f? Argumenta y explica la respuesta.

Para finalizar su rediseño, los profesores en formación eligieron un problema que no está presente en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales, que les permite aplicar los conocimientos a un contexto que sea motivante y desafiante para sus futuros estudiantes.

3. Hace muchos años el visón, originario de Estados Unidos, fue introducido a la Patagonia argentina y en la actualidad se ha logrado establecer desde Tierra del Fuego hasta Pucón. Esta especie, constituye una amenaza importante para la agricultura, ganadería, turismo y para la biodiversidad del país; esto porque ataca ferozmente a animales silvestres y de granja. Se cree que la población de visones crece siguiendo el modelo:

Según el enunciado:

$$N(t) = \frac{10\,(5+3t)}{1+0{,}04\,t}\text{, donde t es el tiempo en años}$$

a. Calcule el número de visones que habrá luego de 5 y 10 años
b. ¿A qué valor tiende la población cuando t tiende al infinito?
c. Demuestra el siguiente límite aplicando la definición y luego grafica la función en GeoGebra: $\lim_{x \to 3}(2x-4) = 2$

Al realizar el análisis de este rediseño a *profundidad*, desde el punto de vista de los criterios de idoneidad didáctica, nos encontramos con que cumple con los todos los indicadores de los criterios solicitados, ya que al considerar las idoneidades:

- Epistémica: no existen errores ni ambigüedades, tiene una riqueza en sus procesos y es representativo, en la idoneidad cognitiva: considera los conocimientos previos, posee una adaptación curricular, promueve el aprendizaje y se requiere una alta demanda cognitiva para desarrollarse;
- Interaccional: a pesar de ser una actividad que se entregó de forma escrita, en la explicación de la misma, indica las interacciones de docente-discente, las interacciones entre discentes, las actividades individuales que fomentaban la autonomía y además contemplaba una evaluación formativa;
- Mediacional: incluye los recursos materiales que se utilizan, las actividades se encuentran contextualizadas, se indican las condiciones de aula esperadas y el tiempo que se pretende utilizar en el desarrollo de la misma;
- Emocional: se tienen presente los intereses, las necesidades, las actitudes y las emociones de los estudiantes.

- Ecológica: las actividades están extraídas y adaptadas desde el currículo vigente, posen conexiones intra e interdisciplinares, consideran la utilidad socio laboral de las mismas e incorporan la innovación didáctica.

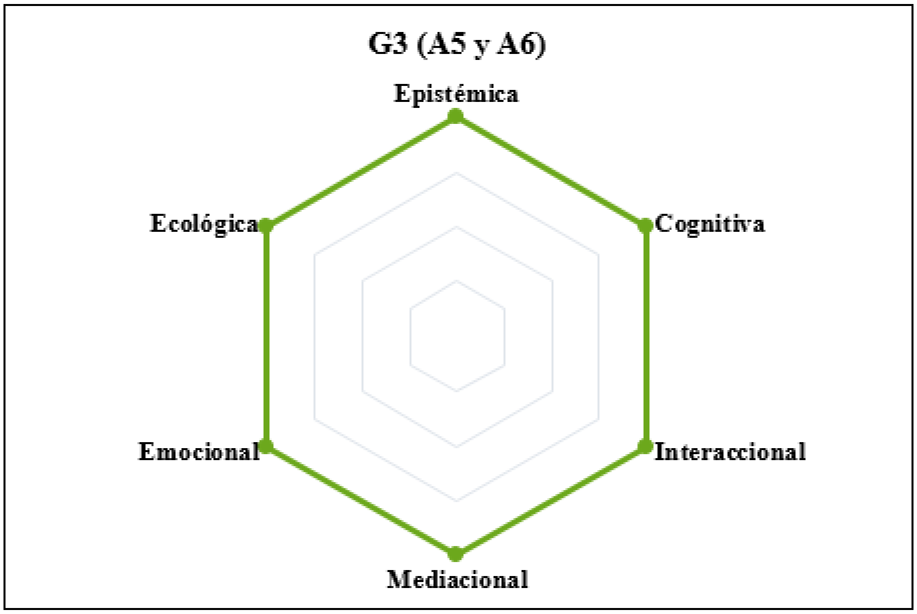


Figura 5 - 2: *Diagrama de los criterios de idoneidad movilizados por los profesores en formación en el rediseño a profundidad G3 (A5 y A6).*

5.2.4 Entrevista Semiestructurada

En la entrevista semiestructurada del G3 (A5 y A6) se mencionan las razones que llevaron a estos profesores en formación para modificar la actividad planteada y cuáles fueron las modificaciones realizadas.

A5: El motivo por el cual rediseñamos la actividad es que encontramos que las preguntas eran un tanto extensas y repetitivas. Nosotros seleccionamos dos actividades desde el Mineduc que en nuestra actividad son el problema 1 y el problema 2, quitando algunos de los ítems sugeridos en cada pregunta, priorizando 5 en la primera y 4 en la segunda. Las otras dos actividades que son el problema 3 y el problema 4 los agregamos a nuestro criterio según los objetivos que estaban planteados por el Mineduc.

Se puede observar un análisis crítico de la actividad planteada y los puntos que consideraron para efectuar su rediseño en profundidad, sin descuidar los objetivos presentes en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales del Mineduc.

Luego podemos resaltar las reflexiones que hicieron como grupo con respecto a la modalidad de implementación de la actividad.

A6: El tipo de gestión que íbamos a presentar nos generó un conflicto porque uno de nosotros consideraba que la actividad debería ser diseñada para una modalidad virtual y presencial, porque se presentaba tecnología y trabajo con los alumnos que se puede hacer en virtualidad, pero al reflexionar consideramos que la actividad debería ser implementada 100% presencial, porque así, se puede ver realmente la cara de los alumnos, las expresiones de los estudiantes, para saber si van necesitando ayuda o no. Por esta razón para presentarse en la virtualidad debería ser un poco más acotada y preguntando en cada momento si los alumnos van o no necesitando ayuda.

Los profesores en formación muestran preocupación por saber cómo sus estudiantes van comprendiendo las actividades propuestas haciendo referencia a un lenguaje no verbal que está presente en las clases presenciales, pero no en las virtuales.

Posteriormente, se confirma lo analizado anteriormente sobre la estructura de la actividad rediseñada.

A5: Con respecto a la tercera pregunta se modificaron las actividades de tal forma que vayan de menos a más, partiendo del área que es el trasfondo del límite para que los estudiantes se adentren en este concepto. El segundo problema habla de la existencia del límite mediante la identificación de la convergencia de puntos en un gráfico. Luego seleccionamos un ejercicio que tiene que ver con orientar la enseñanza dentro de la educación ambiental a nuestros estudiantes y se plantea la invasión del visón que se ha esparcido por gran parte de nuestro país, el que esta modelado por una función donde se busca que reemplacen valores para identificar cuando un límite tiende a un valor en específico y cuando tiende al infinito. El ultimo problema es más matemático involucrando la demostración de un límite, creemos que con esta actividad cumplimos con los objetivos planteados desde el Mineduc.

Los problemas van aumentando su nivel de dificultad, se encuentran contextualizados y con actividades motivadoras y desafiantes para los estudiantes sin dejar de lado los objetivos planteados por el Mineduc.

Finalmente, los profesores en formación hacen referencia a cómo pretenden valorar el aprendizaje de sus estudiantes.

A5: Con respecto a la valoración del aprendizaje de los estudiantes consideramos en primera instancia observar el esfuerzo y la responsabilidad reflejada en la realización de la actividad planteada. En segundo lugar, consideramos que la actividad puede convertirse como evaluación formativa, ya que, fomenta el trabajo autónomo y que podría utilizarse como repaso para una evaluación sumativa.

Se observa que los profesores en formación pensaron más de una forma para considerar la actividad planteada a la hora de llevarla a la práctica.

Una vez finalizado el análisis de la entrevista se puede concluir que los profesores en formación consideraron todos los aspectos presentes en los criterios de idoneidad para realizar una buena clase y da cuenta las reflexiones que realizaron para llegar a este resultado, lo que en la práctica es bastante difícil de llevar a cabo e involucra mucho esfuerzo de los profesores en ejercicio.

5.3 Rediseño *Moderado*

Valora la propuesta ministerial como idónea. Sin embargo, considera que hace falta la movilización de criterios de idoneidad que apoyen una actividad matemática donde el estudiante reflexione profundamente en los fundamentos del concepto a estudiar.

5.3.1 Análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio versión escrita

En la Tabla 13 se evidencian las menciones que realizan los profesores en formación que realizaron un rediseño *Moderado* con referencia a cada criterio de idoneidad en el análisis crítico a la planificación de un profesor en ejercicio en su versión escrita.

Tabla 5 - 13: *Rediseño Moderado, referencias a los distintos criterios de idoneidad en el análisis crítico, versión escrita.*

Grupo	Planificación presencialidad (4° medio).	Planificación en virtualidad (3° medio).
G4 (A7 y A8)	**Epistémica (4)** Errores, Ambigüedades, Riqueza de proceso, Representatividad. **Cognitiva (4)** Conocimientos previos, Adaptación Curricular, Aprendizaje Alta demanda cognitiva. **Interaccional (3)** Interacción docente-discente, Interacción entre discentes, Autonomía. **Mediacional (3)** Recursos, Condiciones del Aula, Tiempo. **Emocional (3)** Intereses y necesidades, Actitudes, Emociones. **Ecológica (2)** Adaptación al currículo, Conexiones intra e interdisciplinares, Innovación didáctica.	**Epistémica (4)** Errores, Ambigüedades, Riqueza de proceso, Representatividad. **Cognitiva (3)** Conocimientos previos, Adaptación Curricular, Aprendizaje. **Interaccional (1)** Interacción docente-discente **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo. **Emocional (3)** Intereses y necesidades, Actitudes, Emociones. **Ecológica (2)** Adaptación al currículo, Innovación didáctica.
G5 (A9 y A10)	**Epistémica (1)** Errores. **Cognitiva (1)** Conocimientos previos. **Interaccional (2)** Interacción docente-discente, Autonomía. **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo. **Emocional (1)** Intereses y necesidades. **Ecológica (2)** Adaptación al currículo, Innovación didáctica.	**Epistémica (2)** Errores, Riqueza de proceso. **Cognitiva (1)** Conocimientos previos. **Interaccional (2)** Interacción docente-discente, Evaluación Formativa. **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo. **Emocional (1)** Intereses y necesidades. **Ecológica (1)** Innovación didáctica.

Los profesores en formación del G4 (A7 y A8) al efectuar el análisis crítico de las planificaciones de tercero y cuarto medio de la profesora en ejercicio, hacen referencia a todas las idoneidades considerando la: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

En cambio, los profesores en formación del G5 (A9 y A10) al realizar el análisis crítico de las planificaciones de tercero y de cuarto medio de la profesora en ejercicio, hacen referencia a todas las idoneidades considerando la: epistémica, interaccional, cognitiva, mediacional, ecológica y emocional.

En el análisis anterior podemos observar cómo dos grupos de profesores en formación que analizaron las mismas planificaciones descubrieron aspectos distintos en su análisis crítico, aunque ambos mencionaron todas las idoneidades, aunque con indicadores diferentes.

5.3.2 Presentación en gran grupo del análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio

En la tabla 14 se puede observar la transcripción de la videograbación de la presentación del análisis crítico efectuado a las planificaciones de la profesora en ejercicio sobre el contenido de límite de funciones, realizada por los dos grupos categorizados como rediseño *moderado*, especificando en qué puntos se centran los profesores en formación al realizar esta exposición de su trabajo.

El grupo 4 efectuó este análisis en forma grupal, pero luego el rediseño lo entregó de forma individual, quedando uno de sus integrantes en un rediseño *Moderado* (A8) y el otro en un rediseño *incipiente* (A7).

***Tabla 5 - 14**: Rediseño Moderado, transcripción de la presentación realizada sobre el análisis crítico de la planificación de una profesora en ejercicio.*

grupo	Comentario (transcripción fiel)	Análisis
G4 (A7 y A8)	A7: Una debilidad de la planificación es que no existe una especie de diálogo entre los estudiantes y a mi consideración los podría separar en grupos para que puedan realizar y discutir las actividades que ella proponga para clase. A7: Se dejan de lado algunos apartados como considerar en sus ejercicios situaciones laborales o sociales a la hora de plantear sus problemas.	Falta la Interacción entre discentes que favorecería el diálogo y comunicación entre los estudiantes. **(Idoneidad interaccional).** Falta considerar los intereses y necesidades de los estudiantes proponiendo situaciones que permitan valorar la utilidad de las

	A7: También podría destinar un tiempo de la clase para trabajar ciertos aspectos de la emocionalidad de los alumnos a la hora de afrontar su asignatura. A7: Desarrollar ejemplos en situaciones de otras disciplinas como por ejemplo la física.	matemáticas en la vida cotidiana y profesional. **(Idoneidad emocional).** Faltan las conexiones intra- e interdisciplinares donde los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos o bien con contenidos de otras disciplinas. **(Idoneidad ecológica).**
G5 (A9 y A10)	A9: La planificación de tercero está más ordenada pero la de cuarto tiene más idoneidades presentes, como la relación entre docente dicente. A9: La planificación de cuarto tenía 2 horas y objetivos más alcanzables, la de tercero más objetivos y solo 1 hora de tiempo. A9: No pudimos apreciar la idoneidad emocional al igual que la ecológica.	La interacción docente discente donde el profesor hace una adecuada presentación del tema de forma clara y bien organizada esta detallada en la planificación. **(idoneidad interaccional).** El tiempo de la enseñanza colectiva/tutoría, tiempo de aprendizaje parece insuficiente para el logro de los objetivos pretendidos. **(Idoneidad mediacional).** Existe una ausencia de los criterios pertenecientes a las idoneidades emocional y ecológica.

En la presentación, los profesores en formación de G4 (A7 y A8) se centran en las debilidades encontradas en la planificación de la profesora en ejercicio, mencionando la ausencia de: 1) la interacción entre discentes, perteneciente a la idoneidad interaccional, 2) los intereses de los estudiantes perteneciente a la idoneidad emocional y 3) las conexiones intra e interdisciplinares pertenecientes a la idoneidad ecológica, aquí se puede observar que el énfasis se encuentra en la preocupación por los estudiantes.

En cambio, los profesores en formación del G5 (A9 y A10) resaltan aspectos positivos como: el orden de las planificaciones perteneciente a la idoneidad interaccional y el tiempo de ejecución de las mismas perteneciente a la idoneidad mediacional, para luego dar cuenta de la ausencia de las idoneidades emocional y ecológica sin mencionar algún componente que pertenezca a ellas como en el caso de la emocional los intereses, necesidades, actitudes o emociones de los estudiantes o en el caso de la ecológica la adaptación al currículo, las conexiones, la utilidad socio laboral o la innovación pedagógica.

5.3.3 Propuesta de rediseño

Al realizar el análisis de estas dos propuestas de rediseño se considerará primero al G4 (A8) quien en su rediseño consideró comenzar con una actividad que familiarice a los estudiantes con el programa GeoGebra, lo que demuestra innovación didáctica aspecto que se encuentra dentro de la idoneidad ecológica, pero su actividad no se encuentra vinculada con el concepto de límite de funciones. En la segunda parte de su actividad indica que explicará cómo construir una sucesión de números naturales y que luego les solicitará a los estudiantes que construyan y presenten como efectuaron esta construcción, no indica cómo relacionar esta parte con la actividad previa en GeoGebra.

***Actividad 1**:* Familiarizándonos con el programa GeoGebra

La actividad del día de hoy será conocer el programa GeoGebra

Aspectos esenciales: ¿Qué es GeoGebra?, según su propia página web:

> GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio. Armonizando lo experimental y lo conceptual para experimentar una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics). La comunidad que congrega lo extiende como recurso mundial, ¡potente e innovador para la cuestión clave y clásica de la enseñanza y el aprendizaje!

Herramientas básicas:

Construye los siguientes objetos: Triangulo, cuadrado, un Angulo y su bisectriz.

El profesor explicara cómo construir una función

Barra de entrada

Después de haber observado los ejemplos, grafica 5 funciones de distinto tipo (logarítmica, exponencial, lineal, etc.)

-Guarda un archivo para cada función y objeto construido, envíalos mediante correo electrónico a la dirección correofalso@correofalso.cl

el profesor mediante exposición enseñará a encontrar el <u>*incentro de un triángulo*</u>

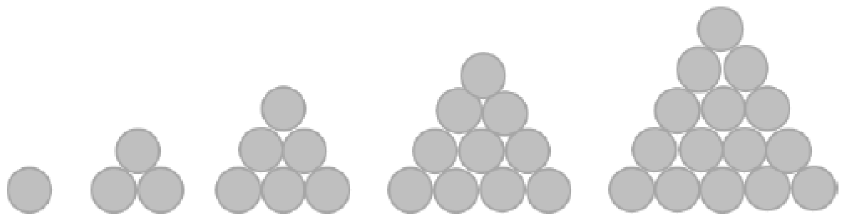
Terminado eso el docente explicará cómo construir una sucesión de los naturales.

Actividad 1.1: Construya 5 sucesiones a su creatividad

El profesor llamará al azar a 4 o 5 estudiante para exponer una de sus sucesiones y nos muestre como la construyó.

Luego continúa con la pregunta 2 de la actividad sugerida a la que le agrega los ítems b y f.

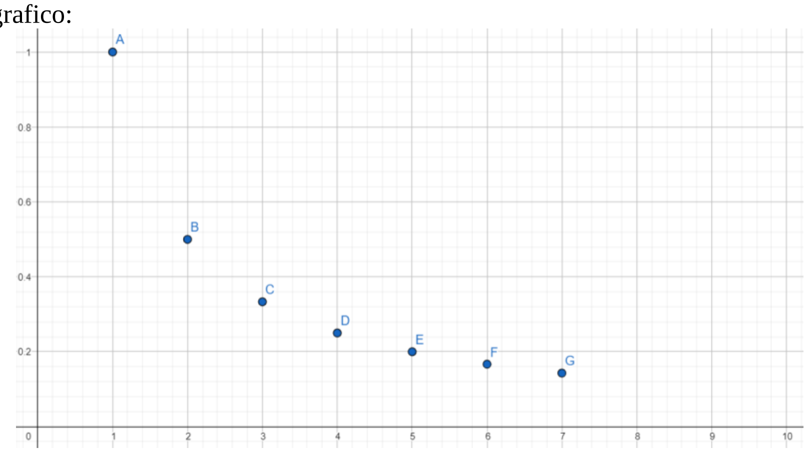
Actividad 2. La imagen muestra cinco "pilas" de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?
b. Elabore una tabla de 2 columnas donde el encabezado de la variable dependiente sea la fórmula del término enésimo.
c. Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.
d. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?
e. Grafica los valores discretos en (punto por punto) en GeoGebra las pilas de la imagen, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar "el último valor".
f. Mediante la fórmula de la pila enésima, construya la sucesión en GeoGebra ¿coincide con su respuesta anterior?.

Para continuar modifica el gráfico entregado en la pregunta 2 de la actividad propuesta en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales, considerando uno en el plano cartesiano en lugar de la recta numérica, modificando las instrucciones de los ítems para que coincidan con lo solicitado.

Actividad 3. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.
Actividad de inicio
Observen el grafico:



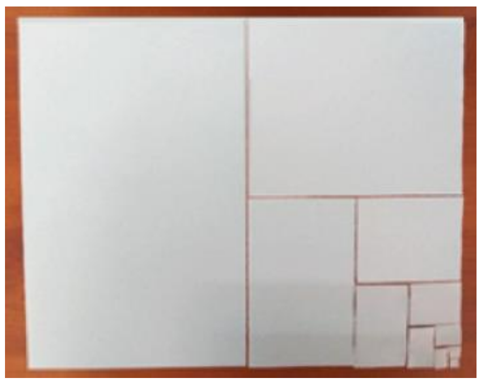
a. ¿En qué intervalo del eje (y) están todas las transformaciones, que ocurre en el eje (x)?
b. Elabora algebraicamente el término general (funcional de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$), que

modela esta transformación.
c. Elabora una tabla de 2 columnas donde el encabezado de la variable dependiente sea la fórmula del término enésimo.
d. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión? Sugerencia: construya la sucesión mediante formula en GeoGebra.
e. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

Para continuar incorpora la pregunta 1 de la actividad sugerida, considerando modificaciones a las instrucciones como el trabajo en equipos y a los ítems de la pregunta como: la elaboración de la tabla y el debate en grupo.

Actividad 4: Hoy debatirán como grupo las ideas de tendencia

1) En grupos de 4 personas recreen digitalmente la siguiente imagen en su lugar de trabajo (usen la herramienta tecnológica que deseen) Sugerencia: Utilicen las herramientas de construcción de polígonos en GeoGebra.



2) Elaboren una tabla de valores en el que la variable dependiente sea el área de cada recuadro individual, y que tenga una columna extra donde deberán entregar la **suma acumulada** de dichas áreas

Ej:

Pasos: n	Área: F(n)	Suma Acumulada de las Áreas
n = 1	½	½ u^2
n = 2	¼	¾ u^2
n = 3	..	.
.	..	...

3) Separémonos en salas cada grupo. Debatan, escriban sus conclusiones a cada una de las siguientes preguntas y escojan un representante para exponer al final de la actividad.

a) ¿Pueden simbolizar matemáticamente el termino enésimo de la 2da y 3ra columna? ¿de ser así, cual es para cada una?
b) ¿Por qué fue necesario utilizar fracciones?

c) ¿A qué número se “acerca” la columna Área? d) ¿Alguna vez F(n) “toca” a este número? e) ¿A qué número se “acerca” la tercera columna? f) ¿Es posible, para algún “n”, sumar el Área anterior? 4) Como grupo curso, elaboremos la gráfica en GeoGebra que representa la primera y otra que represente la segunda columna.

Para finalizar este profesor en formación incorpora como pregunta 5 de su rediseño la pregunta 4 de la actividad propuesta tal como se plantea en el plan y programa.

Al realizar el análisis de este rediseño a *profundidad*, desde el punto de vista de los criterios de idoneidad didáctica, nos encontramos que cumple con todos los indicadores en 4 de las 6 facetas a considerar, estas son las idoneidades: Epistémica, Ecológica, emocional y mediacional, en cambio, en la idoneidad interaccional le faltó considerar la evaluación formativa y dentro de la idoneidad cognitiva le faltó considerar: verificar los conocimientos previos de los estudiantes y alguna aplicación que involucre alta demanda cognitiva.

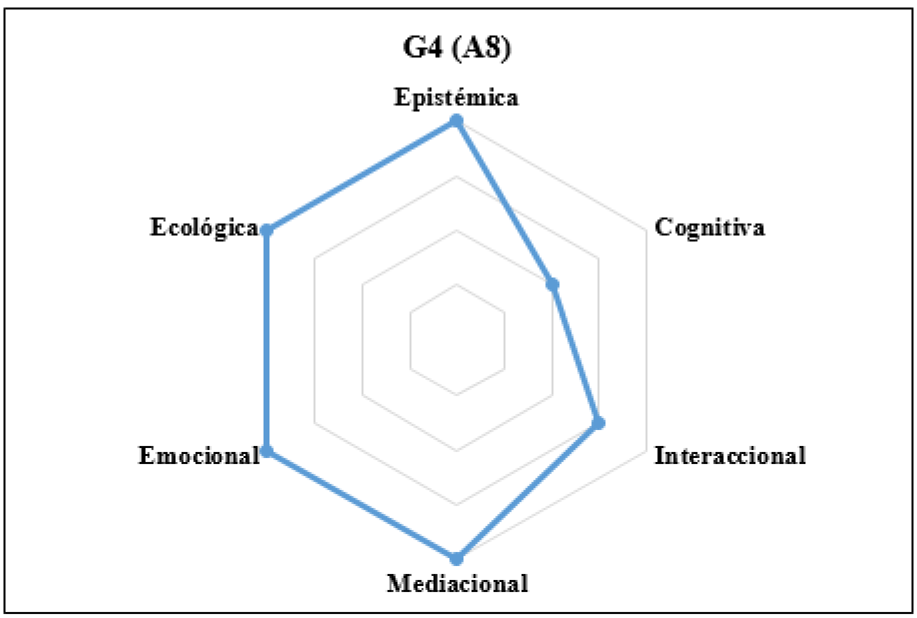


Figura 5 - 3: *Diagrama de los criterios de idoneidad movilizados por los profesores en formación en el rediseño moderado G4 (A8).*

También se encuentran dentro del rediseño *moderado* los profesores en formación del G5 (A9 y A10) quienes en su rediseño consideraron como pregunta 1 la misma sugerida sin ninguna modificación, en cambio, en la pregunta 2 si bien consideran la misma indicación que en la actividad sugerida, en las indicaciones de la pregunta agrega un ítem, d:

d. ¿Cuál es el número natural más grande que se puede tomar para transformarlo en un racional?

La pregunta 3 de la actividad sugerida se encuentra modificada, se mantuvo la indicación inicial y la figura, pero se cambiaron las indicaciones de los ítems de la pregunta como sigue:

a) Dibuje y describa la cantidad de círculos presentes en la próxima sucesión. Compare con sus compañeros.
b) Construya una tabla con la cantidad de círculos en cada figura. Qué patrón logras identificar, comenta con tus compañeros.
c) ¿Qué cantidad de círculos habrán en la figura número 10?
d) Esta sucesión, ¿tendrá un final?. Comenten en el grupo.
e) Elabore algebraicamente el término general de la sucesión. Apóyese a través de internet si lo considera necesario.
f) Gráfica el comportamiento de la sucesión en GeoGebra y comenta tus conclusiones con tus compañeros/as.

Para finalizar como pregunta 4 se creó una diferente al programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales para lograr aplicar y contextualizar lo estudiado sobre límite de funciones.

Jaimito está de cumpleaños y ha invitado a sus amigos, a la hora de la torta les dice el se comerá la mitad porque está de cumpleaños, su mamá y su papá se comerán la mitad de lo que haya quedado y le resto de los amigos se comerá la mitad de lo que vaya quedando.

a. Si al cumpleaños de Jaimito llegaron más 20 invitados, ¿alguno de sus amigos se quedará sin comer torta? Explique que sucede a medida que se reparte la torta.
b. Matemáticamente hablando, ¿Se acabará la torta? Comente con sus compañeros.
c. A la hora de repartir, ¿qué parte de la torta recibirá el 6to invitado?
d. Escribe el término general que indique el reparto de la torta.
e. Si al cumpleaños llegan 100 invitados y se sigue repartiendo la torta de la misma manera. Al invitado número 100, ¿qué porción de la torta le tocará? ¿Es factible en este contexto? Comente frente a la clase.

Al realizar el análisis de este rediseño *moderado*, desde el punto de vista de los criterios de idoneidad didáctica, nos encontramos que cumple con todos los indicadores en 4 de las 6 facetas a considerar, estas son las idoneidades: epistémica, emocional, interaccional y mediacional, en cambio, en la idoneidad ecológica le faltó considerar la utilidad socio laboral y dentro de la idoneidad cognitiva le faltó considerar alguna aplicación que involucre alta demanda cognitiva.

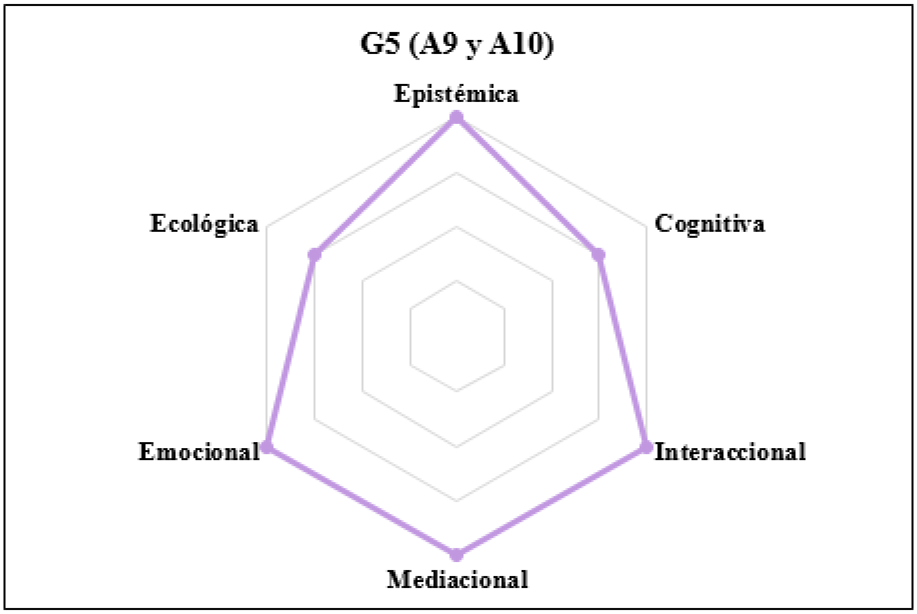


Figura 5 - 4: *Diagrama de los criterios de idoneidad movilizados por los profesores en formación en el rediseño moderado G5 (A9 y A10).*

5.3.1 Entrevista Semiestructurada

En la entrevista semiestructurada de los profesores en formación que realizan un rediseño moderado, es decir G4 (A8) y G5(A9 y 10) se mencionan las razones que llevaron a estos profesores en formación para modificar la actividad planteada y cuáles fueron las modificaciones realizadas.

A8: Yo, modifique un poco la actividad, pero en aspectos mínimos, por ejemplo, cuando al alumno se le pide construir sucesiones convergentes o divergentes, yo prefiero que los alumnos lo realicen pictóricamente a través de GeoGebra, porque el OA g (Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación), que no estaba presente en la actividad original que sugería el Mineduc. Además, yo agregué una situación inicial donde les enseñaría en que consiste GeoGebra, porque es necesario aprender a utilizarlo y cómo se utiliza las herramientas básicas de este programa.

A9: Nosotros con mi compañero al ver la primera pregunta consideramos que los ítems de la misma daban en el clavo con los objetivos que se pretendía abordar, luego agregamos uno que otro ítem en la segunda y tercera pregunta y la última la modificamos completa, ya que encontramos que estaba demasiado larga y quisimos se sea una situación con contexto que sea más real para los estudiantes, pero desde un punto de vista matemático. Pensamos desarrollar estas actividades de forma presencial ya que consideramos que las actividades estaban diseñadas de esa forma y en la virtualidad nos costaría mucho evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Ambos grupos, aunque validan la propuesta del Mineduc, efectúan modificaciones, el G4 (A8) incorpora la tecnología mediante una actividad de GeoGebra que aunque se encuentre desconectada de los otros puntos le permitirá presentar y utilizar este programa con sus estudiantes, el G5(A9 y 10) van más allá y crean un problema contextualizado en su pregunta final que les mostrará a sus estudiantes la aplicación de este concepto.

Luego podemos observar las reflexiones con respecto a la implementación de la clase efectuada por ambos grupos, incluyendo los conocimientos previos necesarios para su implementación.

A8: La actividad que yo diseñé la pretendo desarrollar de forma presencial, porque según creo las actividades del Mineduc fueron realizadas antes de la pandemia, por esta razón preferí implementarlas tal y como fueron diseñadas. Pienso implementarlas en 4 clases, considerando 8 horas pedagógicas para su implementación, ya que, considero que las horas que recomienda el Ministerio son muchas para lo cortas que son las actividades. Con esta implementación busco desarrollar en los estudiantes una visión intuitiva del concepto de límite de funciones, que puedan definir los conceptos de tendencia, convergencia y divergencia.

A8: Para desarrollar esta actividad los estudiantes necesitan como conocimientos previos solamente las unidades anteriores, es decir, funciones.

A9: Por medio de la actividad, se busca que el estudiante logre identificar la noción de límite, consideramos partir con una introducción previa, un juego para que los estudiantes comprendan y se motiven, este podría ser consultarles ¿Cuál es el número positivo distinto de cero más pequeño que conoces?, así los estudiantes pueden notar que existen infinitos números en un intervalo determinado, por ejemplo, entre cero y uno.

A10: en objetivos de aprendizaje planteados en la actividad propuesta en ningún momento se aborda un concepto formal de límite, de hecho, el objetivo solo abarca un acercamiento intuitivo de modo que las actividades giran en torno a la intuición de límite, incluso antes de este, en torno al concepto de sucesión.

A10: Respecto a la modalidad la pensamos de forma presencial, creemos que también la actividad se puede adaptar a la virtualidad.

A10: los alumnos necesitan para esta actividad el conocimiento previo de sucesión, por lo que es necesario abordarlo y trabajarlo, considerando el término general, el término enésimo y existen conceptos clave que para el docente pueden parecer obvios, pero para los estudiantes en ocasiones no lo es, por esto es necesario no utilizar tecnicismos que pueden confundir a los estudiantes. También hay que considerar que dependiendo del contexto donde se esté trabajando los estudiantes pueden presentar otras de dudas que sean necesarias abordar antes de llevar a cabo la realización de esta actividad.

Ambos grupos buscan desarrollar una visión intuitiva del concepto de límite de funciones y piensan que sus actividades se desarrollarían mejor de forma presencial, justificando de diferente forma esta implementación, el G4 (A8) emplea la forma en que fue diseñada la actividad por el Mineduc y el G5(A9 y 10) utilizan en las dinámicas de la clase y consideran que podrían adaptar la actividad a una modalidad virtual. Con respecto a los conocimientos previos, el G4 (A8) menciona solo las funciones, mientras que el G5(A9 y 10) es mucho más detallado en lo necesario para efectuar su actividad.

Finalmente, hacen referencia a la valoración de los aprendizajes

A8: Para valorar el aprendizaje de los estudiantes, como las actividades solicitadas son escritas, yo revisaría cada una de esas actividades buscando ver qué tipo de esquemas están trabajando los alumnos y si existen errores de conceptualización. A10: En mi experiencia de práctica los estudiantes al finalizar la clase suben su actividad a la plataforma utilizada en la clase., esto se podría utilizar para valorizar el aprendizaje, aun así, en presencialidad creemos que la interacción clase a clase y lo que ellos desarrollen de las actividades constituye una forma de valorizar su aprendizaje.

Que en ambos casos considera que los estudiantes entreguen la actividad propuesta de manera escrita y los profesores en formación revisaran el nivel de logro de los objetivos mediante esa revisión.

Una vez finalizado el análisis de las entrevistas, se observa que las motivaciones de sus priorizaciones sobre las idoneidades: epistémica, emocional y mediacional, se basan en sus experiencias previas y en lo que ellos consideran que es importante para que sus alumnos logren desarrollar los objetivos propuestos.

5.4 Rediseño Incipiente

Retoma casi por completo la propuesta ministerial y considera que hay errores en la gestión, principalmente se preocupa por organizar los tiempos de trabajo.

5.4.1 Presentación en gran grupo del análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio

En la Tabla 15 se evidencian las menciones que efectúan los profesores en formación que realizaron un rediseño *Incipiente* con referencia a cada criterio de idoneidad en el análisis crítico a la planificación de un profesor en ejercicio en su versión escrita.

Tabla 5 - 15: *Rediseño Incipiente, referencias a los distintos criterios de idoneidad en el análisis crítico, versión escrita.*

Grupo	Planificación presencialidad (4° medio)	Planificación en virtualidad (3° medio)
G1 (A1 y A2)	**Epistémica (2)** Errores, Ambigüedades **Cognitiva (1)** Conocimientos previos **Interaccional (1)** Interacción docente-discente **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo **Ecológica (1)** Conexiones Interdisciplinarias	**Epistémica (2)** Errores, Ambigüedades **Cognitiva (1)** Conocimientos previos **Interaccional (2)** Interacción docente-discente, Evaluación Formativa **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo **Ecológica (1)** Conexiones Interdisciplinarias
G2 (A3 y A4)	**Cognitiva (2)** Conocimientos previos Aprendizaje **Interaccional (3)** Interacción docente-discente, Autonomía, Evaluación Formativa **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo **Emocional (1)** Intereses y necesidades, Actitudes **Ecológica (2)** Adaptación al currículo, Innovación didáctica	**Epistémica (4)** Errores, Ambigüedades, Riqueza de proceso, representatividad **Interaccional (2)** Interacción docente-discente, Evaluación Formativa **Mediacional (2)** Recursos, Tiempo **Ecológica (1)** Innovación didáctica

Los profesores en formación del G1 (A1 y A2) al realizar el análisis crítico de las planificaciones de tercero y cuarto medio de la profesora en ejercicio, hacen referencia a 5 de las 6 idoneidades considerando la: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, y ecológica, pero dejando de lado la idoneidad emocional.

Los profesores en formación del G2 (A3 y A4) al efectuar el análisis crítico de la planificación de cuarto medio de la profesora en ejercicio, hacen referencia a 5 de las 6 idoneidades considerando la: cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica, pero dejando fuera la idoneidad epistémica y en la de tercero medio solo mencionan 4 de las 6 idoneidades considerando la: epistémica, interaccional, mediacional y ecológica dejando fuera la cognitiva y la emocional.

5.4.2 Presentación en gran grupo del análisis crítico en parejas de la planificación de un profesor en ejercicio

En la tabla 16 se puede observar la transcripción de la videograbación de la presentación del análisis crítico hecho a las planificaciones de la profesora en ejercicio sobre el contenido de límite de funciones, realizada por los dos grupos categorizados como rediseño *incipiente*, especificando en qué puntos se centran los profesores en formación al realizar esta exposición de su trabajo.

Tabla 5 - 16: *Rediseño Incipiente, transcripción de la presentación realizada sobre el análisis crítico de la planificación de una profesora en ejercicio.*

Grupo	Comentario (transcripción fiel)	Análisis
G1 (A1 y A2)	A1: La planificación estaba muy detallada y ordenada, es decir, indicaba que hacer en cada momento de la clase como el inicio, desarrollo, conclusión y que recursos iba a utilizar. A1: Una debilidad de la planificación es que se enfocaba en la participación de los alumnos, nosotros pensamos que si el alumno no participaba la planificación se iba para abajo, bajo nuestra experiencia los estudiantes participan poco en virtualidad.	La interacción docente discente donde el profesor hace una adecuada presentación del tema de forma clara y bien organizada esta detallada en la planificación. (idoneidad interaccional) Las actividades estaban centradas en la Interacción entre discentes que favorecería el diálogo y comunicación entre los estudiantes. (idoneidad interaccional)
G2 (A3 y A4)	A3: En la planificación de tercero medio existía una mejor estructura visual y se veía más ordenada, pero la de cuarto según nuestro punto de vista poseía mayor cantidad de idoneidades, se preocupaba de muchas más cosas de que la de tercero. A4: En la planificación de tercero medio la profesora no hace una actividad para conocer los conocimientos previos de los estudiantes, sino que comienza enseguida con el desarrollo del objetivo de la clase, mientras que en la de cuarto medio si lo hace.	La interacción docente discente donde el profesor hace una adecuada presentación del tema de forma clara y bien organizada esta detallada en la planificación. (idoneidad interaccional) Falta una actividad que permita conocer si los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (Idoneidad cognitiva)

	A4: Vimos que en la de cuarto medio la profesora indica que va a presentar la definición formal de límite y las propiedades, pero no las menciona explícitamente en la planificación, no se sabe si la definición que ella presento a los estudiantes es correcta o no mientras que en la de tercero medio está escrita la definición formal y se puede observar.	En una planificación aparece de forma explícita la representatividad al indicar claramente los significados parciales que pretende abordar, mientras que en la otra no. (Idoneidad epistémica)

En la presentación, los profesores en formación de G1 (A1 y A2) indican una fortaleza de las planificaciones con relación al orden, aspecto que pertenece a la idoneidad interaccional y una debilidad al mencionar que el enfoque centrado en la participación de los estudiantes en una clase virtual puede repercutir negativamente en el desarrollo de la clase, este aspecto también pertenece a la idoneidad interaccional.

En cambio, los profesores en formación del G2 (A3 y A4) resaltan la idoneidad interaccional al mencionar que una de las planificaciones se encontraba más ordenada, pero consideraba menos aspectos que la otra; además hacen referencia a la idoneidad cognitiva al mencionar los conocimientos previos presentes en una planificación y ausentes en la otra; para finalizar resaltan la idoneidad epistémica al considerar la presencia de la definición formal de límite en una planificación de forma explícita y no mencionado en la otra.

5.4.1 Propuesta de rediseño

Al realizar el análisis de estas dos propuestas de rediseño se considerará primero al G1 (A1 y A2), ellos en su rediseño comenzaron danto una indicación general que no estaba presente en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales:

Instrucciones: Para resolver los problemas debes leer cuidadosamente cada una de las indicaciones y responder ampliamente a los distintos cuestionamientos que encuentres. El objetivo de las actividades es realizar las tareas indicadas y dar respuesta a las preguntas que se hacen después de cada problema.

Una vez finalizada esta indicación comienzan su actividad con la pregunta 1 de la actividad sugerida a la que le eliminan ítems dejando 4 de los 9 presentes en la actividad original, los ítems que dejan son: a, b, c e i.

Luego las preguntas 2 y 3 de la actividad propuesta las incorporan tal como están planteadas en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales, en la pregunta 4 transcriben la instrucción inicial, pero reducen los ítems relacionados con la pregunta, dejando 4 de los 11 sugeridos, estos son: a, b, e y g.

Estos profesores en formación no incorporan o adaptan las actividades para establecer los conocimientos previos ni consideran el uso de la tecnología.

La propuesta de rediseño de los profesores en formación del G2 (A3 y A4), para comenzar estos profesores en formación modificaron la instrucción dada en la pregunta 1 de la actividad sugerida donde se solicitaba al estudiante observar el patrón que se representaba en la imagen, por construir el patrón con una hoja de cuaderno, quedando:

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón. Realiza esta actividad con una hoja de cuaderno.

Con esta modificación los profesores en formación buscaban que el estudiante al realizar este patrón según las instrucciones dadas sea más activo en la construcción de su propio conocimiento, se buscaba que la actividad sea más dinámica y lúdica, luego los ítems de la pregunta los transcribieron tal como estaban en la actividad propuesta.

Al continuar su actividad en la pregunta 2 mantuvieron la recomendada, pero los en los ítems de la pregunta agregaron una indicación, aquí los profesores en formación consideraron importante que el estudiante comprenda los conceptos de "tender a" y el "infinito".

d. ¿Qué relación puedes ver entre "sin alcanzar" y el "infinito"?

Luego en la pregunta 3 también mantuvieron la sugerida, sin embargo, modificaron una de las preguntas solicitando la expresión algebraica en lugar de la cantidad de círculos, ya que, los profesores en formación consideran que es más pertinente preguntar sobre la expresión pues generaliza lo pedido y se consigue implícitamente la sucesión que modela la situación, la pregunta queda expresada:

b. Determine la expresión algebraica que permita conocer la cantidad de círculos en la n-ésima pila.

Para finalizar la actividad, como pregunta 4 mantuvieron la sugerida, pero adaptaron la última pregunta de la misma como sigue: en lugar de solicitarles que expliquen utilizando el gráfico, le preguntan qué características tienen las gráficas elaboradas, con esta adecuación los profesores en formación buscaban introducir el concepto "convergencia", de manera implícita, la pregunta queda expresada:

k. Gráfica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano ¿Qué características tienen las gráficas de cada una de las sucesiones?

Al efectuar el análisis de ambos rediseños *Incipiente*, desde el punto de vista de los criterios de idoneidad didáctica, nos encontramos que cumplen con todos los indicadores solo en la faceta epistémica, además cumplen con dos criterios en la faceta cognitiva no considerando los conocimientos previos e incluir actividades con alta demanda cognitiva; en la faceta interaccional dejaron fuera la interacción entre discentes y la evaluación formativa; en la faceta mediacional no se refirieron a la contextualización, ni las condiciones de aula; en la emocional les faltó considerar las actitudes y emociones de los estudiantes y en la ecológica solo consideraron uno de los indicadores, le faltaron las conexiones intra e interdisciplinares, la utilidad socio laboral y la innovación didáctica.

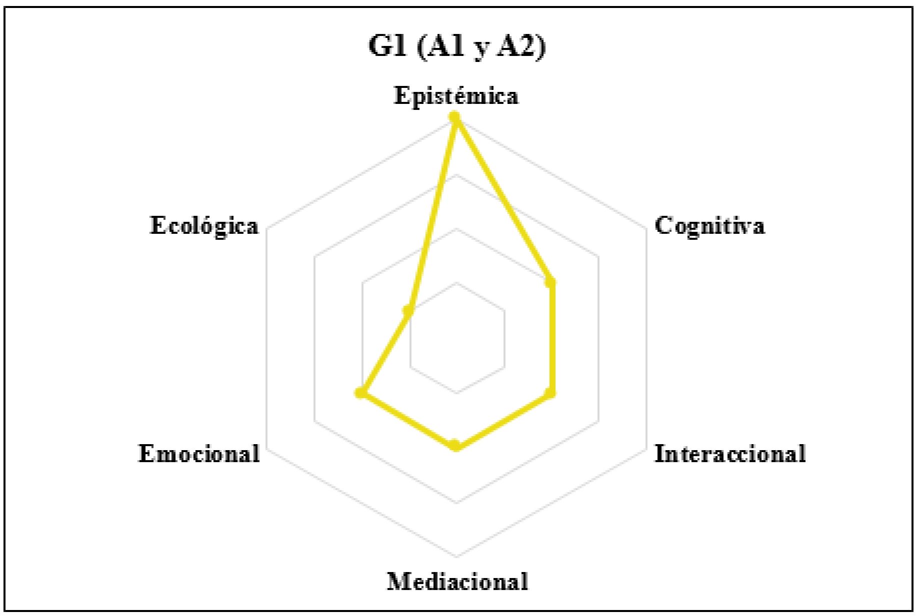


Figura 5 - 5: *Diagrama de los criterios de idoneidad movilizados por los profesores en formación en el rediseño Incipiente G1 (A1 y A2).*

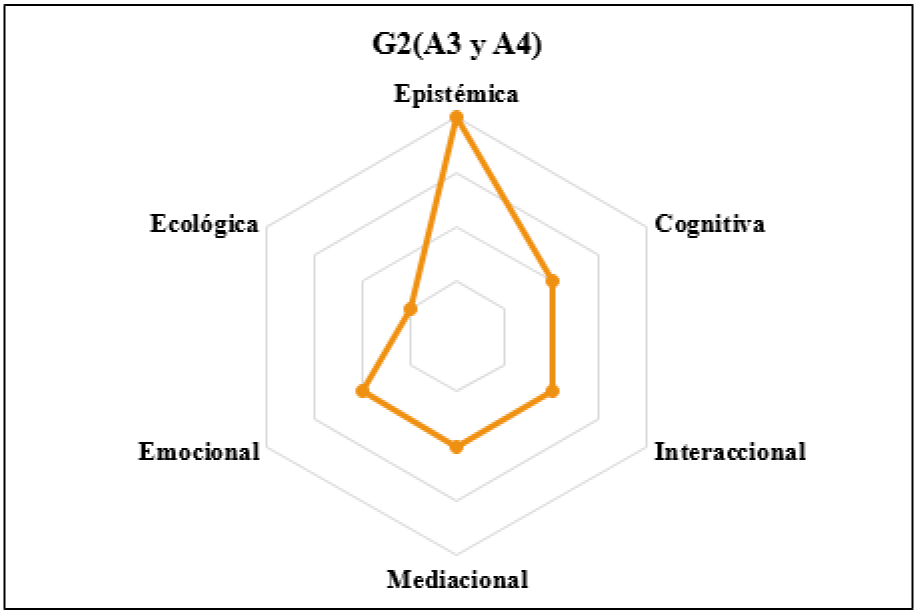


***Figura 5 - 6**: Diagrama de los criterios de idoneidad movilizados por los profesores en formación en el rediseño Incipiente G2 (A3 y A4).*

En los dos rediseños antes mencionados llama la atención que a pesar de que los profesores en formación realizaron diferentes modificaciones a la actividad sugerida al realizar el análisis desde el punto de vista de los criterios de idoneidad consideraron los mismos puntos, para ambos grupos la faceta epistémica estuvo desarrollada a completitud, las facetas: emocional, mediacional, interaccional y cognitiva fueron considerados solo dos de sus indicadores y la ecológica solo en uno de ellos. Y al revisar en profundidad se observa que los indicadores de los criterios presentes y ausentes fueron los mismos en los dos rediseños.

Finalizamos con la propuesta de rediseño de G4 (A7), ya que como mencionamos anteriormente, los profesores en formación pertenecientes a este grupo entregaron sus rediseños por separado, aunque efectuaron los análisis críticos de forma grupal.

Este profesor en formación comenzó su actividad con una indicación general que no se encuentra presente en la actividad sugerida, además indica que leerá la instrucción en conjunto con sus estudiantes consultándoles si tienen dudas e indicándoles que estará disponible para cualquier duda que les pueda surgir durante el desarrollo de la misma, la instrucción inicial fue:

Para resolver los problemas debes leer cuidadosamente cada una de las indicaciones y responder ampliamente a los distintos cuestionamientos que encuentres. El objetivo de las actividades es realizar las tareas indicadas y dar respuesta a las preguntas que se hacen después de cada problema.

Luego presentó las preguntas 1, 2, 3 y 4 con los ítems de las preguntas tal como aparecen en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales, explicando que al impartir la actividad: 1) los estudiantes trabajaría en grupos donde la lectura de cada problema se le asignaría a uno de los integrantes, 2) se trabajaría con un problema a la vez asegurándose que todos los integrantes entiendan antes de continuar con el siguiente, 3) cada vez que se finalice un problema se socializarán las respuestas con el grupo curso, 4) una vez finalizadas las actividades el profesor hace una retroalimentación de las preguntas que hayan tenido una dificultad mayor para los alumnos y una explicación de conceptos que no hayan quedado demasiado claros.

Al efectuar el análisis de este último rediseño de carácter *Incipiente*, desde el punto de vista de los criterios de idoneidad didáctica, nos encontramos que cumplen con todos los indicadores las facetas epistémica y emocional, además cumplen con 3 de los criterios en las facetas mediacional, faltándole la contextualización y en la faceta interaccional donde no consideró una evaluación formativa dentro de la actividad; en la faceta cognitiva consideró 2 de los indicadores faltándole incluir los conocimientos previos de sus estudiantes y que sus actividades requieran una alta demanda cognitiva y en la faceta ecológica le falto considerar las conexiones, la utilidad socio laboral y la innovación didáctica.

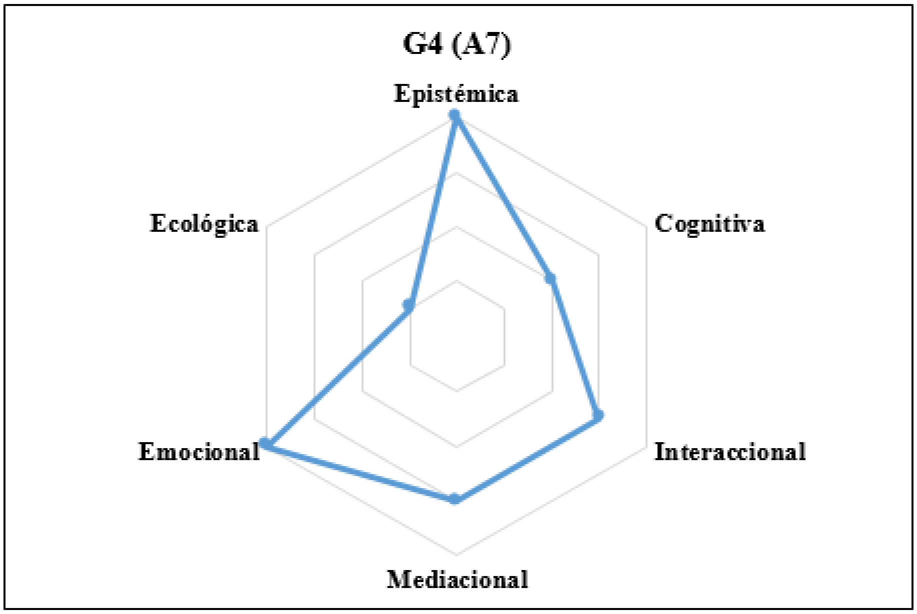


Figura 5 - 7: *Diagrama de los criterios de idoneidad movilizados por los profesores en formación en el rediseño Incipiente G4 (A7).*

5.4.2 Entrevista Semiestructurada

En la entrevista semiestructurada de los profesores en formación que efectúan un rediseño incipiente, es decir G1 (A1 y A2), G2(A3 y A4) y G4(A7) se mencionan las razones que llevaron a estos profesores en formación para modificar la actividad planteada y cuáles fueron las modificaciones realizadas.

A1: Nosotros nos apoyamos en las actividades del Mineduc, el principal motivo por el cual rediseñamos las actividades quitándole algunas preguntas fue que consideramos que en algunos apartados había exceso de preguntas y algunas muy redundantes, consideramos que se preguntaba exactamente lo mismo, con otras palabras. Además, quitamos preguntas porque pensamos implementar la actividad en un contexto de virtualidad y el exceso de preguntas podía provocar que el estudiante perdiera el interés en lo que se estaba realizando.

A4: Creemos que las actividades que propuso el Mineduc podían mejorarse, existiendo ventajas como: las actividades son bastante completas, las preguntas se conectan entre sí, el nivel de dificultad va aumentando progresivamente y cada actividad tiene una imagen que ayuda a comprender que se solicita en cada caso, en cuanto a las desventajas, las actividades son bastante extensas y demandan mucho tiempo lo que puede generar desmotivación en los estudiantes.

A7: Yo decidí apegarme a lo que el Mineduc propone porque quiero evaluar desde las herramientas que este nos entrega dentro del contexto de una clase virtual.

Los tres grupos muestran sus argumentos para sus rediseños de carácter insipiente, entregando los argumentos de sus rediseños, mientras menos rediseño implementaron más válida encuentran la actividad planteada, resultando que los G1 (A1 y A2), G2(A3 y A4) consideraran los mismos criterios de idoneidad didáctica y G4(A7) considerara más de ellos, ya que eliminaron menos ítems de los planteados en la actividad original.

Al referirse a la forma de implementación de la propuesta, los grupos mencionan:

> A2: Con esta propuesta se está desarrollando la idea de límite que tiende a algo, que el número tiende a algo, relacionándolo con la sucesión, se pretende trabajar con el límite de sucesiones generando la idea de que quieren llegar a algo, pero que nunca llegan.
>
> A2: En la implementación de la actividad, pensamos realizar una breve introducción de lo que es el límite, ya que consideramos que son actividades muy simples que permiten introducir las nociones de sucesiones y límite para luego pasar a lo formal, consideramos que las actividades son para comenzar la clase.

> A4: Consideramos que la implementación de la actividad sea de forma presencial, ya que esperamos mucha interacción entre el profesor y los estudiantes, la que no siempre ocurre en la virtualidad, dosificaríamos las actividades otorgándoles 2 horas a cada una, para que el estudiante pueda reflexionar, ya que el contenido es complejo y que eso le permitiría al profesor despejar la mayor cantidad de dudas posible.
>
> A4: Nosotros esperamos que los estudiantes comprendan los conceptos elementales que sirven como base para entender la noción intuitiva de límite.
>
> A4: La implementación se realizaría antes de introducir de forma intuitiva el concepto de límite, ya que las actividades se basan en reconocer patrones, y tienen de manera implícita las sucesiones que básicamente son los conocimientos previos que ellos ya tienen. Nosotros esperamos que los estudiantes tengan cierto grado de manejo en estos contenidos, que los recuerden con las actividades y refuercen para que tengan más dominio del tema.

> A7: Con respecto al tiempo de la clase yo considero que se puede hacer en un segmento de 60 minutos gran parte de las preguntas planteadas se pueden realizar cada 15 minutos en colaboración con los estudiantes.
>
> A7: Con respecto a los conocimientos previos es necesario que los alumnos tengan varias nociones de sucesiones, ya que es muy importante para comprender límites, además los conceptos de funciones y los conocimientos básicos de los números racionales e irracionales. Los límites son un tema complejo que se ve en los planes electivos de los colegios, no en matemática común, ya que, son necesarias muchas habilidades y conocimientos para poder desarrollarlos.
>
> A7: La actividad presentada podría ser utilizada en una clase previa a alguna evaluación, porque las preguntas que se sugieren abarcan varios conceptos de límites que se tendrían presentes dentro de una evaluación.

Los tres grupos buscan desarrollar la noción intuitiva de límite y consideran que las actividades pueden aplicarse en poco tiempo, dando a entender que, a pesar de considerar los límites como un tema complejo, piensan que las actividades serán sencillas para sus estudiantes.

Con respecto a la valoración de los aprendizajes, los grupos mencionan que:

A2: De los 15 minutos que dejamos para cada actividad, dejaríamos los dos últimos minutos para que los estudiantes nos respondan las preguntas, para motivarlos, consideramos hacer una clase amigable con ellos.

A2: Para relacionar el trabajo planteado con las respuestas de los estudiantes esperaríamos respuestas como se acercan, tienden, llegan. Podemos esperar que los estudiantes puedan cometer errores y corregirlos al final de las actividades.

A3: Valoramos el aprendizaje del estudiantado por medio de la interacción, buscamos que exista bastante interacción con la mayoría de los estudiantes. A través de las respuestas que ellos nos den o las reflexiones que ellos logren realizar vamos a ir valorando si el objetivo se logró o no se logró.

A3: Como las actividades fueron pensadas para la presencialidad consideramos que podemos monitorear de una mejor forma el trabajo que realizan los estudiantes, ellos nos pueden realizar sus consultas, nosotros podemos observar sus expresiones cuando responden una pregunta, además podemos ver si están o no trabajando.

A7: Para valorar el aprendizaje de los estudiantes pienso escuchar las respuestas de los estudiantes esperando que ellos puedan identificar el trasfondo de las actividades, por ejemplo, en la pregunta 1, que los alumnos al realizar la actividad vayan encontrando los elementos de la sucesión y los conceptos estudiados. En cada pregunta se debe tener presente cuales son las respuestas esperadas para observar la progresión del alumno en estas actividades, así el docente puede ir monitoreando en cada momento de la clase como los estudiantes van adquiriendo estos objetivos de aprendizaje.

En los tres grupos proponen valorar los aprendizajes mediante la interacción con los estudiantes con base en las respuestas que el docente les haga o las respuestas a las preguntas de la actividad diseñada.

Una vez finalizado el análisis de la entrevista efectuada a los tres grupos que realizaron un rediseño incipiente, podemos confirmar que ellos consideran que la actividad que diseñaron puede ser implementada en poco tiempo y que sus estudiantes no tendrán inconvenientes para comprenderla, además llama la atención la mención a la interacción docente discente, dando a entender que les preguntaran a cada estudiante para verificar su aprendizaje, aspecto que no es factible de llevar a cabo a menos que se tenga muy pocos alumnos en el aula.

6. CONCLUSIONES

6.1 Introducción

A continuación, nos referiremos a las reflexiones realizadas a partir de los resultados de la investigación obtenidos durante este trabajo, el enfoque se concentró en explorar los rediseños de una actividad propuesta a profesores en formación de último año de la carrera de pedagogía en matemática y computación de la Universidad de los Lagos. La actividad que los profesores en formación rediseñaron fue extraída del programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales que entró en vigencia a partir del año 2020, esta revisión se efectuó utilizando una herramienta del EOS denominada criterios de idoneidad que nos permite valorar la calidad matemática de la clase mediante indicadores que los profesores plasmaron tanto en su rediseño escrito, en la presentación del mismo y en las respuestas a la entrevista semiestructurada realizada.

Comenzamos por presentar las respuestas obtenidas a los objetivos de investigación planteados, comenzando con cada uno de los tres objetivos específicos elaborados, buscando dar respuesta a la pregunta de investigación para finalizar con la respuesta al objetivo general de la presente investigación, continuamos con las limitaciones del estudio efectuado y finalizamos con las consecuencias que esta investigación puede tener para la enseñanza.

6.2 Respuestas a los objetivos de investigación

6.2.1 Respuestas a los objetivos específicos de investigación

OE1: Identificar el tipo de tareas sobre límite de funciones presentes en los textos de estudio

Para dar respuesta a este objetivo es necesario recordar que para el diferenciado de límite derivadas e integrales no están disponibles textos de estudio, como si existen en matemática común, donde, por cada nivel, hay un texto del estudiante, un cuaderno de ejercicios y un texto del docente, en el caso del diferenciado solo está disponible el programa de estudio que tienen las actividades planteadas, en el caso de límite son cuatro actividades sugeridas, cada actividad incorpora una breve indicación al docente para orientarlo en cómo implementar la actividad sugerida.

En esta investigación se revisaron las 4 actividades sobre límite de funciones propuestas por el Mineduc en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales que puede ser impartido en el nivel de tercero o cuarto año de enseñanza media, según lo determine el colegio considerando las preferencias e intereses de sus estudiantes. En las actividades planteadas se identificaron los registros de representación considerados: verbal, gráfico, tabular, icónico y simbólico, estableciendo si estaban presentes o ausentes en cada una de las preguntas de cada actividad.

Se encontró que existen representaciones presentes en todas las actividades, estas son: verbal, tabular y simbólica, ya que facilitan la comprensión de lo solicitado en cada uno por parte de los estudiantes; en cambio, la representación gráfica se encuentra ausente en 3 de las actividades donde se aplica o se debe aplicar el concepto de infinito debido a la confusión que podría generar en los estudiantes, y la representación icónica está presente solo en 3 de las 14 preguntas propuestas debido a que si representamos el límite mediante una imagen o esquema parcial puede generar un obstáculo a la hora de resolver los problemas y cumplir los objetivos planteados.

Las tareas propuestas son en su mayoría cerradas las que no son las ideales para la clase, ya que como menciona Zaslavsky (1995) las tareas de final abierto, permiten que al realizarse pequeñas modificaciones a los enunciados se logren grandes diferencias en el proceso de enseñanza aprendizaje, permitiendo a los estudiantes discutir las diferentes respuestas obtenidas lo que enriquece el trabajo matemático de la clase, en cambio, al elegir tareas cerradas buscando que los estudiantes lleguen a una respuesta única y orientar el camino de lo que se quiere lograr, no se genera reflexión de los estudiantes, ni se deja espacio a encontrar diversas estrategias de solución, por estas razones se considera que para poder implementar una de las actividades planteadas de acuerdo con los criterios de idoneidad y buscando que los estudiantes logren cumplir los objetivos propuestos, es necesaria una adecuación de las mismas.

La configuración epistémica de límite que promueven las actividades propuestas en el programa de estudio del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales fue analizada desde dos puntos de vista, el primero apoyado a los significados de límite determinados por el EOS desarrollado en el trabajo de Contreras, et al., (2012) donde encontramos que los significados: gráfico, geométrico y numérico se encuentran presentes en todas las actividades sugeridas, el preinfinitesimal solo en tres de ellas y el infinitesimal solo en una de ellas, además, estos últimos dos significados se encuentran relacionados con todo un desarrollo previo vinculado a los significados previos, por lo que si se quieren implementar tal como están en el programa de estudio, no se logrará abordar con la profundidad necesaria para lograr la comprensión de todos los estudiantes, es necesaria una adecuación de los problemas sugeridos para que los estudiantes logren cumplir los objetivos propuestos.

El segundo, se encuentra apoyado en la revisión histórica epistemológica realizada por (Bastías et al., 2021) donde se observa que los significados parciales presentes en todas las actividades del Mineduc son (EC1), (EC4) y (EC5), esto se justifica debido a que (EC1) es una forma que permite introducir a los estudiantes en el cálculo desde aspectos concretos que ellos ya conocen, es decir, permite al docente recuperar los conocimientos previos de los estudiantes para introducir un concepto nuevo, la (EC4) permite que los estudiantes transiten de lo concreto anteriormente estudiado a lo nuevo, al generar lo finito por procesos infinitos y la (EC5) representa el primer acercamiento a las definiciones formales del concepto de límite de una función, luego la (EC2) está presente en 3 de las actividades debido a su falta de simbología adecuada para representar los indivisibles que puede generar confusión en los estudiantes y la tanto (EC3) como la (EC6) están presente solo en 2 de las 4 actividades debido a que la primera se encuentra relacionada con aspectos de física como velocidad, flujo o velocidad de flujo que no son el foco que busca promover el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales propuesto por el Mineduc y la segunda debido a la dificultad que pueden tener los estudiantes para entender este significado parcial sin caer en la algoritmización del concepto de límite de una función.

Finalizando, la revisión anterior podemos concluir que las actividades propuestas están diseñadas de manera robusta, ya que todas tienen al menos 3 cambios de registros de representación (verbal, tabular y simbólico), todas promueven al menos tres significados de límites de acuerdo con Contreras et al., (2012) (gráfico, geométrico y numérico) y todas promueven al menos 3 de los significados parciales (EC1, EC4 y EC5) de acuerdo con Bastías et al., (2021).

Pero para cumplir con los criterios de idoneidad es necesario realizar un rediseño de las actividades propuestas que logre la adaptación de las mismas al contexto de los estudiantes, los motive, sea un desafío para ellos y consideren los conocimientos previos de los mismos, logrando así un aprendizaje significativo de los alumnos.

OE2: Conocer el tipo de tareas sobre límites de funciones que privilegian los profesores

Los profesores en formación al basarse en la actividad propuesta extraída del programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales promovieron representaciones muy similares a lo analizado en el punto anterior, priorizando los cambios de registro verbal, tabular y simbólico, aunque ellos también consideraron el registro gráfico, ya que, en su mayoría trabajaron con la noción intuitiva del concepto de límite de funciones, en el cual esta representación no generaría confusión, el registro que estuvo ausente en los rediseños de los profesores en formación fue el icónico, debido a los mismos motivos que se mencionaron anteriormente al realizar la revisión de la actividad propuesta, evitar la generación de confusión en los estudiantes a la hora de resolver problemas.

En cuanto a las tareas que priorizaron los profesores en formación en su mayoría fueron de final cerrado, debido a que la actividad sugerida también tenía esta estructura, pero dentro de las respuestas esperadas por los profesores en formación de los estudiantes se menciona una reflexión que ayude a verificar la comprensión del concepto intuitivo del límite de una función, esperando que los estudiantes logren expresar con sus palabras lo que entendieron de lo trabajado en clases, para ello en la mayoría de los grupos mencionan que escuchara las respuestas de todos sus estudiantes para verificar el nivel de logro de los aprendizajes, intención que es difícil de cumplir en una clase que tenga muchos alumnos.

Los profesores en formación mediante sus rediseños buscaban en su gran mayoría desarrollar la noción intuitiva de límite de funciones, pero algunos grupos fueron más allá y a partir de la definición formal, desarrollan una definición informal para luego con la organización de sus preguntas en la actividad llegar a la definición formal del límite de funciones.

En su gran mayoría basan sus rediseños en su propia experiencia, es decir, como los profesores en formación aprenden determinados conceptos es definitorio para como los enseñaran en un futuro, lo que concuerda con los resultados obtenidos por Pochulu et al., (2016).

OE3: Analizar los criterios presentes en los rediseños de actividades sobre límites de funciones propuestas en los libros de texto

Los profesores en formación participantes en la investigación realizaron tres niveles de rediseño: 1) *A profundidad*, 2) *Moderado*, 3) *Incipiente,* al realizar la revisión desde los criterios de idoneidad mediante el gráfico radial se observa que:

En el rediseño *a profundidad* se realizó un cambio completo de la actividad sugerida incorporando preguntas desde otras actividades del programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales, una aplicación a un problema contextualizado que promovía conexiones con otras disciplinas y un problema final sobre la demostración de la existencia de un límite. En los demás instrumentos se pudo observar que los profesores en formación efectuaron un análisis crítico a la actividad sugerida y lo modificaron pensando en sus estudiantes y los objetivos propuestos, logrando incorporar todos los indicadores de los criterios de idoneidad.

En el rediseño *Moderado* los profesores de ambos grupos que efectuaron este tipo de rediseño validaron la actividad propuesta como adecuada para enseñar el contenido de límite de funciones a alumnos de tercero y cuarto año de enseñanza media, pero, aun así, realizaron modificaciones, el G4 (A8) incorporó una actividad inicial en GeoGebra respondiendo a un objetivo del programa que no había sido desarrollado en la actividad propuesta y realizó modificaciones para que sus estudiantes pudieran entender mejor las instrucciones dadas en cada problema, en cambio, el G5 (A9 y A10) explicó en la entrevista que iniciarían con un juego para motivar el trabajo con la primera actividad propuesta que fue incorporada a su rediseño, tal como se planteaba, pero en el problema final incorporaron una situación problema contextualizada donde los estudiantes debían aplicar los conocimientos sobre límite de funciones estudiados.

Con las modificaciones anteriores ambos grupos lograron promover cuatro de los criterios de idoneidad a cabalidad, lo que es una buena aproximación para lograr una clase idónea.

En el rediseño *Incipiente* los tres grupos que realizaron este tipo de rediseño validaron la actividad propuesta al argumentar que solo hicieron pequeñas modificaciones en las instrucciones generales y en algunos ítems de cada pregunta, también eliminaron ítems por considerarlos repetitivos.

En el rediseño de carácter *incipiente* nos encontramos que dos de los grupos G1(A1 y 2) y G2 (A4 y A5) a pesar de que los profesores en formación efectuaron diferentes modificaciones a la actividad sugerida, al efectuar el análisis desde el punto de vista de los criterios de idoneidad se observa que consideraron los mismos puntos, para ambos grupos la faceta epistémica estuvo desarrollada a completitud, las facetas: emocional, mediacional, interaccional y cognitiva fueron considerados únicamente dos de sus indicadores y la ecológica solo en uno de ellos. Y al revisar en profundidad se observa que los indicadores de los criterios presentes y ausentes fueron los mismos en los dos rediseños.

Y el G4 (A7), nos encontramos que cumple con todos los indicadores las facetas epistémica y emocional, además cumple con 3 de los criterios en las facetas mediacional, en la faceta cognitiva consideró dos de los indicadores y en la faceta ecológica solamente cumplió con uno de los criterios de idoneidad.

Lo anterior nos hace reflexionar que los tres grupos consideran que la actividad que diseñaron puede ser implementada en poco tiempo y que sus estudiantes no tendrán inconvenientes para comprenderla, además llama la atención, la mención recurrente a la interacción docente discente, dando a entender que le preguntaran a cada estudiante para verificar su aprendizaje, aspecto que no es factible de llevar a cabo a menos que se tenga muy pocos alumnos en el aula.

6.2.2 Respuesta al objetivo general de investigación

OG. Estudiar el tipo de relaciones que se establecen entre los criterios emergentes en el rediseño de problemas sobre límites de funciones en libros de texto y el conocimiento didáctico matemático que moviliza el profesor.

Una vez finalizada la investigación se concluye que en los rediseños realizados por los profesores en formación existen tres niveles de rediseño: un rediseño a *profundidad*, un rediseño *moderado* y un rediseño *Incipiente*.

El rediseño además de encontrarse apoyado en el manejo del objeto matemático a partir de las configuraciones existe una movilización de otros criterios como la naturaleza de las matemáticas, los profesores en formación que hacen un rediseño a *profundidad* utilizan una matemática con un carácter histórico y cultural mientras que los profesores en formación que efectúan un rediseño *moderado* o *Incipiente* se sitúan en una matemática de algoritmos, conceptos, es decir, la matemática que ellos utilizan tiene un carácter absolutista, ya que es omnipresente y no cambia, está siempre presente, quienes la utilizan la descubren, concuerda con Cornelius y Ernest, (1991) al argumentar que la matemática estuvo dominada por más de 2000 años por una visión absolutista, que considera a esta disciplina como un cuerpo de verdad infalible y objetiva, muy alejado de los asuntos y valores de la humanidad y que contrasta con las nuevas visiones de la matemática que la ubican como cualquier otro cuerpo de conocimiento, es decir, que es el producto de la inventiva humana (Lakatos, 1976; Davis y Hersh, 1980; Tymoczko, 1986).

Los profesores en formación que efectuaron un rediseño a *profundidad* se tomaron el tiempo de revisar el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales al que todos tenían acceso para encontrar una actividad que se ajustara mejor a su forma de explicar este contenido, en cambio, los profesores en formación que realizaron un rediseño *moderado* o *Incipiente* solo trabajaron con la actividad entregada.

Los profesores en formación que realizaron un rediseño a *profundidad* buscaron una actividad extra que no esté en el programa del Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales para contextualizar el contenido de límite de funciones que estaban trabajando a una situación que sea motivante y desafiante para sus futuros estudiantes.

Los dos puntos anteriores sugieren que los profesores en formación que hacen un rediseño *moderado* o *Incipiente* si tuvieran que impartir el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales utilizarían la propuesta ministerial del programa tal como se entrega o con muy pocas modificaciones, esto nos indica que estos profesores en formación al ente gubernamental, es este caso el Ministerio de Educación lo consideran el poseedor de todo el conocimiento matemático que se debe aprender, no asumen una postura crítica y proactiva, contradiciendo lo estipulado en las bases curriculares, planes y programas, MBE y la ley general de la educación sobre que el profesor debe adaptar los contenidos a estudiar al contexto de sus estudiantes lo que es equivalente a lo mencionado en los criterios de idoneidad en referencia a la faceta ecológica en sus componentes sobre conexiones intra e interdisciplinares y la utilidad socio–laboral.

6.3 Limitaciones de la investigación e implicaciones a futuro

La principal limitante de la presente investigación es que los profesores en formación no tenían acceso a implementar sus rediseños con estudiantes de tercero y cuarto medio. Por esta razón solo fue posible saber su punto de vista desde la actividad implementada entregada de forma escrita con comentarios de los profesores en formación sobre como la llevarían a la práctica y las respuestas de los mismos a las preguntas sobre sus implementaciones, no fue posible establecer si al realizar las implementaciones de los rediseños creados, los alumnos de enseñanza media comprenderían sus instrucciones y lograrían cumplir los objetivos propuestos.

Una implicación a futuro en este aspecto sería replicar la experiencia de enseñanza con un grupo de profesores en formación que tengan acceso a implementar sus rediseños y así establecer si los análisis efectuados se corroboran en la práctica o se modifican.

Otra limitación de la presente investigación es que producto de la pandemia, las intervenciones con los profesores en formación solamente pudieron efectuarse de manera virtual, al igual que el trabajo en parejas que ellos llevaron a cabo para generar sus rediseños y las prácticas que ellos realizaron en estos últimos dos años (2020 y 2021) en su gran mayoría también se realizaron de forma virtual, con horario reducido, lo que ha evitado que estos profesores en formación conozcan en sus últimas prácticas el trabajo real en aula y rediseñaron basándose en sus experiencias previas.

Una implicación a futuro en este punto sería replicar la experiencia con profesores en formación que estén asistiendo a la universidad y a sus centros de práctica de manera presencial y verificar qué cambios tienen sus rediseños al compararlos con los efectuados en esta experiencia.

6.4 Consecuencias para la enseñanza

Se considera que la presente investigación tiene consecuencias para la enseñanza considerando tres focos: 1) Esperamos que las actividades realizadas en esta experiencia les sean de utilidad a los profesores en formación participantes, ya que, es posible que en su primer año de ejercicio en un colegio tengan que implementar el Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales. 2) Para los futuros estudiantes de los profesores en formación que participaron de la experiencia tendrán la ventaja que sus profesores durante su formación universitaria hayan reflexionado sobre la implementación de este programa diferenciado, por lo que esperamos que les sea más sencillo decidir cómo modificar las propuestas del Mineduc para lograr un aprendizaje de todos sus estudiantes. 3) Que a futuro brinde una guía a los formadores de profesores de matemática, para notar que es necesario enseñarles a los profesores en formación cómo efectuar la transposición didáctica de contenidos con alto grado de dificultad como el concepto de límite de funciones a estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media.

Por último, se considera que deja líneas de investigación abiertas como el rediseño de actividades del programa de Diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales que involucre los criterios de idoneidad para verificar la idoneidad de la clase diseñada, impulsar en los programas de formación de profesores el diseño y rediseño de actividades, promover la reflexión de la práctica docente, entre otros.

BIBLIOGRAFÍA

Akbaba Dağ, S., & Kılıç Şahin, H. (2019). Examining the problems posed by pre-service primary school teachers in subtraction with fractions. *Dumlupınar University Graduate School of Education Journal*, *3*(1), 12–23.

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México

Alanís, J., & Salinas, P. (2010). Cálculo de una variable: Acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. *El Cálculo y su Enseñanza*, *2*(1), 1-14.

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* México: Paidós.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., & Smith, J. P. (1998). Teaching mathematical problem solving: An analysis of an emergent classroom community. *Research in Collegiate Mathematics Education* III, 7, 1–70.

Aizikovitsh-Udi, E., Clarke, D., & Kuntze, S. (2013). Hybrid tasks: Promoting statistical thinking and critical thinking through the same mathematical activities. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 451–460).

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico* (trad. José Barbini). México: Siglo XXI.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barahmand, A. (2017). The boundary between finite and infinite states through the concept of limits of sequences. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(3), 569-585.

Bastias, D. A., Pino-Fan, L. R., Medrano, I. G., & Castro, W. F. (2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*, 179-205.

Bell, A. W. (1979). Research on teaching methods in secondary mathematics. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4–12). Warwick: PME.

Bell, A. (1993b). Principles for the design of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 5–34.

Betancur, A., Guarin, S., y Fiallo J. (2015a). *La idea de límite como una aproximación óptima*. En G. Obando (ed). 16º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá. Colombia.

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015b). *La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite*. IX Simposio Nororiental de matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. (30), 67-84

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Breda, A. & Lima, V. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. Redimat, 5(1), 74-103.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The journal of the learning sciences*, *2*(2), 141-178.

Caglayan, G. (2015). Math majors' visual proofs in a dynamic environment: the case of limit of a function and the ϵ–δ approach. *International journal of mathematical education in science and technology*, *46*(6), 797-823.

CIAE. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media: Centro de Investigación Avanzada en Educación*. Recuperado de https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/03/Est%C3%A1ndares_Media.pdf.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*, 24, 68-95.

Contreras, Á., García, M., y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42b), 667–690.

Cornelius, M., & Ernest, P. (1991). The philosophy of mathematics Education. *British Journal of Educational Studies*, 39(3).

Cornu, B. (1991). *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*. FeniXX.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de límite. These de doctorat de troisikme cycle de Mathématiques pures*. Université de Grenoble

Creswell, J. W. (2003). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2.ª ed.). Londres: Sage. Chapter 4 Choosing a Mixed Methods Design.

Creswell, J. W. (2013b). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (3a. ed.). Thousand Oaks, CA, EE. UU. SAGE

Davis, P. J. and Hersh, R. (1980). *The Mathematical Experience*.

Ding, L., Jones, K., & Pepin, B. (2013). Task design in a school-based professional development programme. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 441–450).

Ding, L., Jones, K., Pepin, B., & Sikko, S. A. (2014). How a primary mathematics teacher in Shanghai improved her lessons: A case study of ‘angle measurement’. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education* (pp. 113–120). Nottingham: BCME.

Doğan-Coşkun S. (2019). The analysis of the problems posed by pre-service elementary teachers for the addition of fractions. *International Journal of Instruction, 12*(1),1517–1532. https://doi.org/10.29333/iji.2019.12197a.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113–134). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.008

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., y Gregorini, M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Union. Revista Iberoamericana de educación matemática*, 11, 113-132.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., Gregorini, M. y Henzenn, N. (2008). El límite infinito: una situación didáctica. *Revista Premisa*, 10(36), 11-21.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Fernández, J. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones*. (Tesis de Maestría). Universidad de Granada. España.

Fernández, J. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada. España.

Font, V. (2014). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Documento no publicado. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universitat de Barcelona.

Frank, K., & Thompson, P. W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. ZDM–Mathematics Education, 53(3), 549-562.

García, G., Serrano, C., y Díaz, H. (2002). *La aproximación: una noción básica en el cálculo: un estudio en la educación básica*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ghedamsi, I., & Lecorre, T. (2021). Transition from high school to university calculus: a study of connection. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(3), 563-575.

Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study, 22, 581-590.Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Números*, (20), 13–31.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Godino, J. D., & Neto, T. (2013). Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. *Granada, España: Universidad de Granada/Departamento de Didáctica de las matemáticas*.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90–113.

Gökkurt, B., Örnek, T., Hayat, F., & Soylu, Y. (2015). Assessing students' problem-solving and problem-posing skills. *Bartin University Journal of Faculty of Education, 4* (2), 751–774. https://doi.org/10.14686/buefad.v4i2.5000145637.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

Gravemeijer, K., van Galen, F., & Keijzer, R. (2005). Designing instruction on proportional reasoning with average speed. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–108). Melbourne: PME

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 33–56. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2001). The role of surprise and uncertainty in promoting the need to prove in computerized environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127–150.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education* (p. 10). Dordrecht: Springer.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México, D.F.: McGraw-Hill.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*. Michoacan University San Nicolás de Hidalgo. Morelia. Mexico.

Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM–Mathematics Education, 53*(3), 635-647.

Hummes, V., Breda, A., Seckel, M., y Font, V. (2020). Criterios de idoneidad didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Praxis & Saber, 11*(26), e-0667.

Huang, R., & Bao, J. (2006). Towards a model for teacher professional development in China: Introducing Keli. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 279–298.

Işık, C., & Kar, T. (2012). Analyzing problems posed by 7th grade students for addition operation with fractions. *Elementary Education Online*, *11*(4), 1021–1035.

Janvier, C. (1979). The use of situations for the development of mathematical concepts. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135–143). Warwick: PME.

Kar, T. (2014). *Investigating middle school mathematics teachers' mathematical knowledge for teaching in the context of problem posing: the example of addition operation with fractions*. Council of Higher Education National Thesis Center (Publication No. 366543) [Doctoral dissertation, Ataturk University].

Kar, T., & Işık, C. (2014). Analyzing problems posed by seventh grade middle school students for subtraction operation with fractions. *Elementary Education Online*, *13* (4), 1223–1239. https://doi.org/10.17051/io.2014.13224.

Koichu, B., Zaslavsky, O., & Dolev, L. (2013). Effects of variations in task design using different representations of mathematical objects on learning: A case of a sorting task. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 461–470). Available from: hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Komatsu, K., & Tsujiyama, Y. (2013). Principles of task design to foster proofs and refutations in mathematical learning: Proof problem with diagram. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 471–480). Available from hal. archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Lakatos, I. (1976). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 27(3), 201-223.

Ley N° 20370. Diario Oficial de la República de Chile, 02 de julio de 2010. https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1014974

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 776–785). Lyon, FR: CERME6.

Limón, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change. *Learning & Instruction*, 11, 357–380. doi:10.1016/S0959-4752(00)00037-2.

Maldonado, A., Medina, L., Mesa, V., Molfino, V., Ochoviet, C., Pagés, D., Rivero, F. (2015). Tareas enfocadas a similitudes y diferencias como motor para el aprendizaje de la matemática: nuevas categorías. En Buendía, G., Molfino, V., Ochoviet, C. *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa*. *Vol. II*. Consejo de Formación en Educación. Departamento de Matemática. Uruguay

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the Intuitive bear on the Formal; A Didactical Approach for the Understanding of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics* 48, 259–288. https://doi.org/10.1023/A:1016004822476

Mertens, D. M. (2010). Philosophy in mixed methods teaching: The transformative paradigm as illustration. *International Journal of Multiple Research Approaches*, 4(1), 9-18.

Mineduc y CPEIP (2008). Marco para la Buena Enseñanza. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de https://www.docentemas.cl/docs/MBE2008.pdf

Mineduc, (2019). Bases Curriculares 3º y 4º medio. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Mineduc, (2020). Programa de Estudio 3 y 4 medio, Límites, Derivadas e Integrales: Formación Diferenciada Matemática. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa.pdf

Movshovitz-Hadar, N., & Edri, Y. (2013). Enabling education for values with mathematics teaching. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 377–388). Available from hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Monaghan, J. (1986). *Adolescents' understanding of limits and infinity* (Doctoral dissertation, University of Warwick).

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the learning of mathematics*, 11(3), 20-24.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(3), 621-633.

Müller, G., & Wittmann, E. (1984). Der mathematikunterricht in der primarstufe.

Muñoz, M. y Román, N., (1999). "*Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal*", Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España. Recuperado de https://web.mat.upc.edu/narciso.roman/docs/histci.pdf

Öçal, M. F., Ìpek, A. S., Özdemir, E., & Kar, T. (2018). Investigation of elementary school students' problem posing abilities for arithmetic expressions in the context of order of operations. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(2), 170–191. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.333037.

Örnek, T., & Soylu, Y. (2017). *Evaluating the solubility of the problems posed by the prospective elementary mathematics teachers*. May 17-19. Afyon, Turkey: TÜRKB˙ILMAT-3 [Conference presentation abstract] http://bilmat.org/calisma_grubu/wp-content/uploads/2017/09/ozet2017.pdf.

Özgen, K., Aparı, B., & Zengin, Y. (2019). Problem posing based learning approaches of eighth grade students: implementation of active learning framework supported by Geogebra. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *10*(2), 501–538. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.471760.

Pino-Fan L. y Godino J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *XXXVI* (1), 87–109.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*. doi:10.1080/14794802.20 13.836379

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(1), 71-98.

Rangel, R., Betancourt, A., Árcega, M., y García, J. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. *37*, 91-110.

Rodríguez L., Bravo J., Pérez A., Rodríguez N. (2020). El GeoGebra como recurso didáctico para la comprensión de las formas indeterminadas del límite. *Uso de los recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas*, *33*(1), 751-762.

Rueda, C. J., Valdés Godínes, J. C., & Guzmán Flores, T. (2017). Límites, desafíos y oportunidades para enseñar en los mundos virtuales. *Innovación educativa*. México, DF, 17(75), 149-168.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and the cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher*, 38, 329–342

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(3), 355-382. Recuperado en 12 de noviembre de 2021.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación básica con mención en matemática*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona, Barcelona. Disponible en: https://www.tesisenred.net/handle/10803/385915

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23.

Sierpińska, A. (1987). Estudiantes de Humanidades y obstáculos epistemológicos relacionados con los límites. *Estudios educativos en matemáticas* 18, 371–397.

Sierpińska, A. (1994a). The diachronic dimension in research on understanding in niathematics-usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. *Didactica Mathematicae*, 16(01).

Sierpińska, A. (1994b). *Understanding in Mathematics* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203454183

Stephan, M., & Akyuz, D. (2013). An instructional design collaborative in one middle school. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 509–518).

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619"

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Tymoczko, T. (1986). Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 8(3), 44-50.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1984). Introducción ir hacia la gente. Introducción a los métodos cualitativos de investigación.

Tertemiz, N., & Sulak, S. E. (2013). The examination of the fifth-grade students' problem posing skills. *Elementary Education Online, 12*(3), 713–729.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1941–1950). Lyon: France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Toh, T.L., (2021). School calculus curriculum and the Singapore mathematics curriculum framework. *ZDM Mathematics Education* **53,** 535–547. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01225-6

Torroba, E., Reid, M., y Etcheverry, N. (2006). Enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de funciones con el uso de tic's. *Enseñanza*, 151, 31.

Turhan Türkkan, B. (2018). Examination of middle school sixth grade students' problem posing skills about fraction operations. *Inonu University Journal of the Faculty of Education, 19*(9), 374–390. https://doi.org/10.17679/inuefd.358159.

Van Harpen, X., & Presmeg, N. (2015). An investigation of high school students' mathematical problem posing in the United States and China. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 293–308). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3.

Van Merriënboer, J. J. G., Clark, R. E., & de Croock, M. B. M. (2002). Blueprints for complex learning: The 4C/ID-model. *Educational Technology Research and Development*, 50(2), 39–64.

Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (p. 339). Springer Nature.

Yang, Y., & Ricks, T. E. (2013). Chinese lesson study: Developing classroom instruction through collaborations in school-based teaching research group activities. In Y. Li & R. Huang (Eds.), *How Chinese teach mathematics and improve teaching* (pp. 51–65). London: Routledge

Zapata, J., Escobar, J., y Bernal, D. (2014). *La comprensión intuitiva del concepto de límite en un grupo estudiantes de cálculo diferencial.* (Tesis de Pregrado). Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.

Zaslavsky, O. (1995). Open-Ended Tasks as a Trigger for Mathematics Teachers' Professional Development. *Learning of Mathematics, 15*(3), 15–20.

Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). Setting the Stage: A Conceptual Framework for Examining and Developing Tasks for Mathematics Teacher Education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics*, 1–19. A: Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09812-8_1

Zehir, K. (2013). *Investigation of pre-service elementary mathematics teachers' problem posing skills for fraction operations*. Council of Higher Education National Thesis Center (Publication No. 350071) [Doctoral dissertation, Ataturk University].

ANEXOS

A. Actividad del Programa del Diferenciando de Límites, Derivadas e Integrales solicitada a los profesores en formación

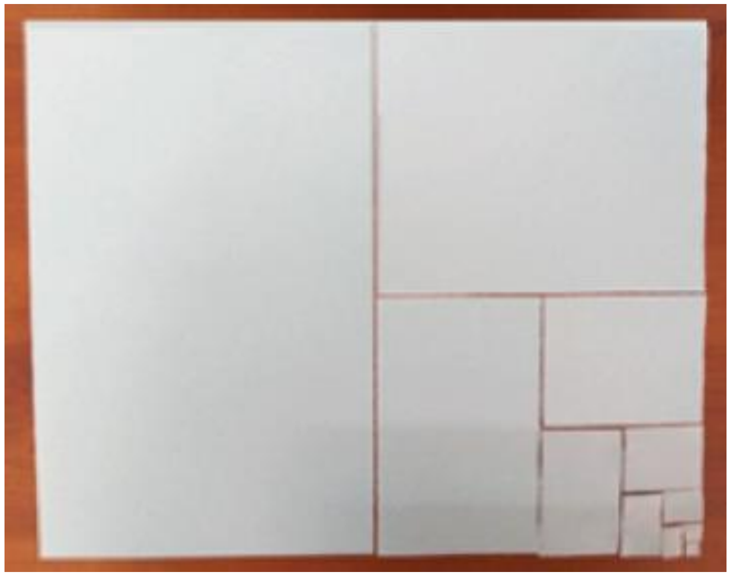
Actividad 1: Programa de estudio 3º o 4º Medio, Formación Diferenciada Matemática Límites, Derivadas e Integrales (páginas 82 a 86)

Nombre	Representando el límite de sucesiones en contextos geométricos
Descripción	Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma intuitiva y visual. Se comienza con patrones geométricos sencillos y la noción del último elemento de un patrón infinito. Se espera que, al hacer conjeturas sobre el límite, reconozcan que un error es una posibilidad que se puede discutir y sirve a todos para aprender. Además, podrán resolver los problemas utilizando las herramientas digitales o de conocimientos que estén a disposición.
OA 2	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.
OA d	Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
OA g	Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
Actitudes	Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
Duración	12 horas pedagógicas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

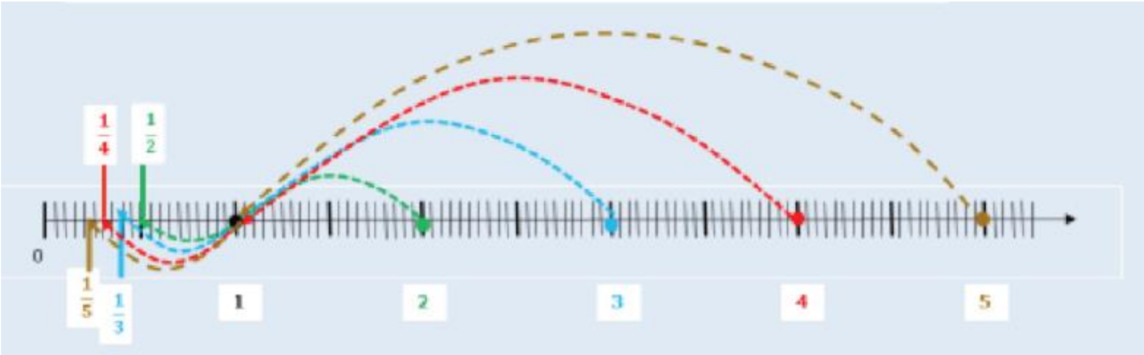
COMPRENDIENDO LOS PATRONES INFINITOS

2. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



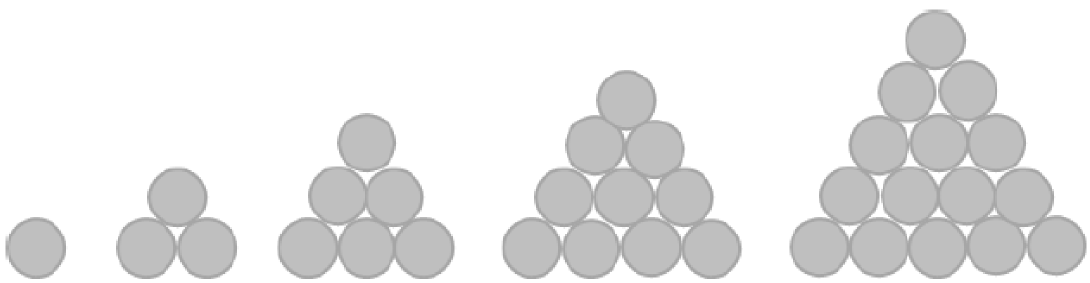
a. ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
b. Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
c. Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el "último elemento" de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?
d. Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el "último elemento" de la sucesión.
e. ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?
f. ¿Qué relación puedes ver entre "sin alcanzar", el "infinito" y los números naturales?
g. Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
h. Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.
i. ¿Qué ocurre con el "último elemento" en este caso?

3. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.



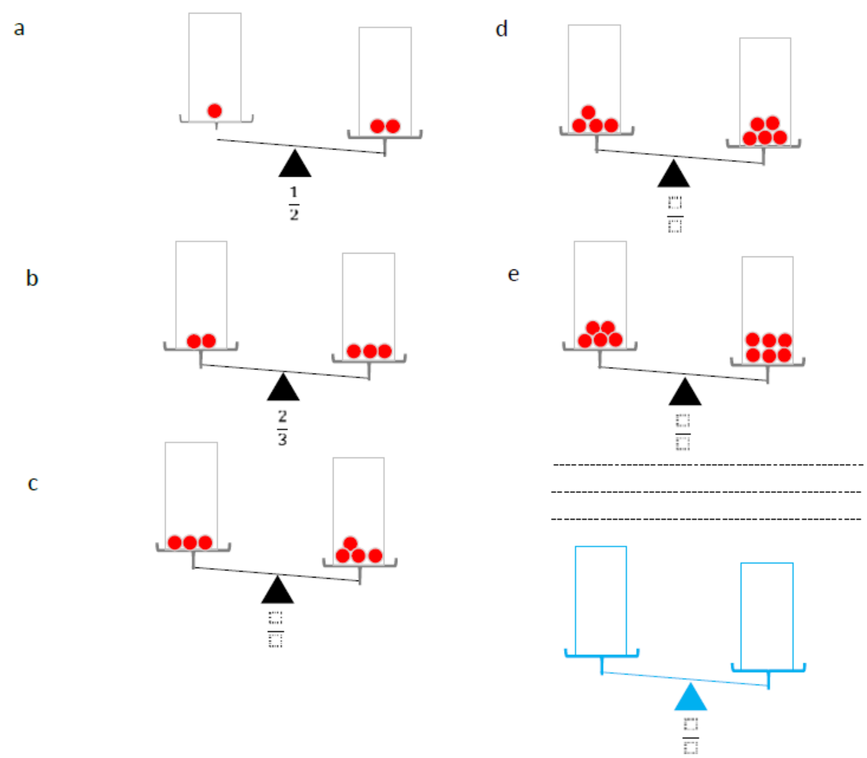
a. ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?
b. Elabora algebraicamente el término general (funcional de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$), que modela esta transformación.
c. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?
d. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

3. La imagen muestra cinco "pilas" de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?
b. Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.
c. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?
d. Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar "el último valor".

4. La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.



a. Describe verbalmente a tu compañero un patrón según el cual se irían llenando ambos platos de la balanza.
b. Escribe un patrón según el cual se forman las fracciones que representan la razón entre la cantidad de las bolitas del plato izquierdo y del plato derecho.
c. ¿Cuál podría ser el término n-ésimo? Escribe la fracción de la balanza en enésima posición dibujada en azul.
d. ¿Cuál es el valor al que tienden a llegar todos los elementos de la sucesión de las fracciones?
e. ¿Qué valor no pueden superar los elementos de la sucesión?
f. Siguiendo infinitamente el mismo procedimiento de llenar las balanzas, ¿alcanzarán el equilibro en algún momento? Explica a tu compañero lo que piensas.
g. Manteniendo la misma cantidad de bolitas e invirtiendo los platos del lado izquierdo con el derecho, ¿cuál es la diferencia con la sucesión anterior?
h. Elabora el término general de la nueva sucesión.
i. ¿A qué número tienden los elementos de esta sucesión?
j. ¿Se pondrá en algún momento la balanza en equilibrio? Explica tu respuesta a un compañero.
k. Grafica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano y explica utilizando el gráfico.

B. Indicadores de idoneidad presentes en los rediseños por grupo

Indicadores de idoneidad didáctica por criterio	G1 (A1 y A2)	G2 (A3 y A4)	G3 (A5 y A6)	G4 (A7)	G4 (A8)	G5 (A9 y A10)
Epistémica						
Errores (Sin prácticas incorrectas)	x	x	x	x	x	x
Ambigüedades (sin confusión)	x	x	x	x	x	x
Riqueza de procesos	x	x	x	x	x	x
Representatividad	x	x	x	x	x	x
Cognitiva						
Conocimientos Previos			x			x
Adaptación Curricular	x	x	x	x	x	x
Aprendizaje	x	x	x	x	x	x
Alta demanda cognitiva			x			
Interaccional						
Interacción docente-discente	x	x	x	x	x	x
Interacción entre discentes			x	x	x	x
Autonomía	x	x	x	x	x	x
Evaluación formativa			x			x
Mediacional						
Recursos Materiales	x	x	x	x	x	x
Conte1tualización			x		x	x
Condiciones del aula			x	x	x	x
Tiempo	x	x	x	x	x	x
Emocional						
Intereses	x	x	x	x	x	x
Necesidades	x	x	x	x	x	x
Actitudes			x	x	x	x
Emociones			x	x	x	x
Ecológica						
Adaptación al currículo	x	x	x	x	x	x
Cone1iones intra e interdisciplinar			x		x	x
Utilidad socio laboral			x		x	
Innovación didáctica			x		x	x

C. Preguntas de la entrevista semiestructurada realizadas a los profesores en formación sobre sus rediseños

1) ¿Cuál fue el motivo por el que rediseñaron o no la actividad?, es decir ¿Qué falencias o ventajas encontraron en la propuesta del Mineduc?
2) El tipo de gestión del profesor que planificaron ¿En qué modalidad la pensaron implementar, virtualidad o presencialidad? ¿Cómo dosificarían las actividades y por qué?
3) Con este diseño ¿qué noción parcial del concepto de límite buscan que el estudiante desarrolle?
4) ¿Por qué priorizaron estos indicadores y no otros?; ¿Cuál fue el motivo de su elección?
5) ¿Cómo piensan valorar el aprendizaje de sus estudiantes?

D. Respuestas de la entrevista semiestructurada realizadas a los profesores en formación sobre sus rediseños

Comentario (transcripción fiel)
G1 (A1 y A2)
A1: Nosotros nos apoyamos en las actividades del Mineduc, el principal motivo por el cual rediseñamos las actividades quitándole algunas preguntas fue que en algunos apartados había exceso de preguntas y algunas muy redundantes, consideramos que se preguntaba exactamente lo mismo, con otras palabras. Además, quitamos preguntas porque pensamos implementar la actividad en un contexto de virtualidad y el exceso de preguntas podía provocar que el estudiante perdiera el interés en lo que se estaba realizando. A2: Con esta propuesta se está desarrollando la idea de límite que tiende a algo, que el número tiende a algo, relacionándolo con la sucesión, se pretende trabajar con el límite de sucesiones generando la idea de que quieren llegar a algo, pero que nunca llegan. A2: Dentro de los criterios de idoneidad presentes en la actividad que desarrollamos encontramos la idoneidad epistémica, interaccional (si el alumno tiene una duda pueda preguntarle al profesor), mediacional (recursos entregados), consideramos que en la actividad del Mineduc propuesta se promueven los mencionados anteriormente. A2: En la implementación de la actividad pensamos realizar una breve introducción de lo que es el límite, ya que consideramos que son actividades muy simples que permiten introducir las nociones de sucesiones y límite para luego pasar a lo formal, consideramos que las actividades son para comenzar la clase. A2: De los 15 minutos que dejamos para cada actividad, dejaríamos los dos últimos minutos para que los estudiantes nos respondan las preguntas, para motivarlos, consideramos hacer una clase amigable con ellos. A2: Para relacionar el trabajo planteado con las respuestas de los estudiantes esperaríamos respuestas como se acercan, tienden, llegan. Podemos esperar que los estudiantes puedan cometer errores y corregirlos al final de las actividades. A2: nosotros hicimos la implementación en una sesión de clases ya que quitamos preguntas y pensamos que las 12 horas pedagógicas eran para la unidad completa y no solo para esta actividad.

G2 (A3 y A4)
A4: Creemos que las actividades que propuso el Mineduc podían mejorarse, existiendo ventajas como: las actividades son bastante completas, las preguntas se conectan entre sí, el nivel de dificultad va aumentando progresivamente y cada actividad tiene una imagen que ayuda a comprender que se solicita en cada caso, en cuanto a las desventajas, las actividades son bastante extensas y demandan mucho tiempo lo que puede generar desmotivación en los estudiantes. A4: Consideramos que la implementación de la actividad sea de forma presencial, ya que esperamos mucha interacción entre el profesor y los estudiantes, la que no siempre ocurre en la virtualidad, dosificaríamos las actividades otorgándoles 2 horas a cada una, para que el estudiante pueda reflexionar, ya que el contenido es complejo y que eso le permitiría al profesor despejar la mayor cantidad de dudas posible. A4: Nosotros esperamos que los estudiantes comprendan los conceptos elementales que sirven como base para entender la noción intuitiva de límite. A3: Nosotros tomamos la idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional y ecológica. Cognitiva: en las actividades se ve presente que la dificultad de cada pregunta se va incrementando. Interaccional: Como esta actividad la diseñamos para la presencialidad esperamos mucha interacción entre profesor y estudiantes. Mediacional: Por la distribución del tiempo. A3: Valoramos el aprendizaje del estudiantado por medio de la interacción, buscamos que exista bastante interacción con la mayoría de los estudiantes. A través de las respuestas que ellos nos den o las reflexiones que ellos logren realizar vamos a ir valorando si el objetivo se logró o no se logró. A4: La implementación se realizaría antes de introducir de forma intuitiva el concepto de límite, ya que las actividades se basan en reconocer patrones, y tienen de manera implícita las sucesiones que básicamente son los conocimientos previos que ellos ya tienen. Nosotros esperamos que los estudiantes tengan cierto grado de manejo en estos contenidos, pero que recuerden con las actividades y refuercen para que tengan más dominio del tema. A3: Como las actividades fueron pensadas para la presencialidad consideramos que podemos monitorear de una mejor forma el trabajo que realizan los estudiantes, ellos nos pueden realizar sus consultas, nosotros podemos observar sus expresiones cuando responden una pregunta, además podemos ver si están o no trabajando.
G3 (A5 y A6)
A5: El motivo por el cual nosotras rediseñamos la actividad es que encontramos que las preguntas eran un tanto extensas y repetitivas. Nosotros seleccionamos dos actividades desde el Mineduc que en nuestra actividad son el problema 1 y el problema 2 y con respecto a los ítems de cada pregunta planteados quitamos algunas, en la primera priorizamos 5 y en la segunda priorizamos 4 y las otras dos actividades que son el problema 3 y el problema 4 los agregamos a nuestro criterio según los objetivos que estaban planteados por el Mineduc. A6: El tipo de gestión que íbamos a presentar nos generó un conflicto porque uno de nosotros consideraba que la actividad debería ser diseñada para una modalidad virtual y presencial. Se consideraba que se podía presentar en ambos contextos porque se presentaba tecnología y trabajo con los alumnos que se puede hacer en virtualidad, pero al discutir se presentó un punto que es que la actividad debería ser implementada 100% presencial porque así se puede ver realmente la cara de los alumnos, las expresiones de los estudiantes, para saber si van necesitando ayuda o no. Por esta razón considero que para presentarse en la virtualidad debería ser un poco más acotado y preguntando en cada momento si los alumnos van o no necesitando ayuda. A5: Con respecto a la tercera pregunta se modificaron las actividades de tal forma que vayan de menos a más, partiendo del área que es el trasfondo del límite para que los estudiantes se vayan adentrado en este concepto. Luego el segundo problema habla de la existencia de límite mediante la identificación de la convergencia de puntos en un gráfico. Luego seleccionamos un ejercicio que tienen que ver con orientar la enseñanza dentro

de la educación ambiental a nuestros estudiantes y se plantea la invasión del visón que se ha esparcido por gran parte de nuestro país, el que esta modelado por una función donde se busca que reemplacen valores para identificar cuando un límite tiende a un valor en específico y cuando tiende al infinito.
El ultimo problema es más matemático involucrando la demostración de un límite, creemos que con estas actividades cumplimos con los objetivos planteados desde el Mineduc.

A6: Con respecto a la priorización de los indicadores de los criterios de idoneidad se buscó una entrega de conocimientos completa que logre educar al estudiantado desde la conceptualización, es decir, que mientras aprenda las matemáticas establezca relaciones con otras áreas del conocimiento. Se priorizó las idoneidades: epistémica, cognitiva, mediacional e interaccional, ya que nos parecieron más importantes y adecuadas para este trabajo.

A5: En la pregunta anterior priorizamos esos criterios o indicadores, pero nos dimos cuenta que igual se presentaban los otros que eran los emocionales y ecológicos, principalmente estos dos se vieron en el tercer problema incorporado, es decir, la contextualización, ya que en lo emocional respondía a presentar problemas de interés para los estudiantes y en lo ecológico se encontraba relacionado con otras áreas de conocimiento como la educación medioambiental.

A5: Con respecto a la valoración del aprendizaje de los estudiantes consideramos en primera instancia observar el esfuerzo y la responsabilidad reflejada en la realización de la actividad planteada. En segundo lugar, consideramos que la actividad puede convertirse como evaluación formativa, ya que, fomenta el trabajo autónomo y que podría utilizarse como repaso para una evaluación sumativa.

A6: Considero que esta actividad esta pensaba para el momento inicial, ya que la primera pregunta se encuentra relacionada con los conocimientos previos dando un pequeño acercamiento a lo que son los límites, porque en la primera pregunta los estudiantes deben en base a rectángulos calcular el área de un triángulo.

A5: Los estudiantes necesitarían como conocimientos previos, en el primero problema, el cálculo de áreas, en el segundo tendrían que recordar como graficar puntos, como se grafica una función dentro del plano cartesiano y que conclusiones podemos obtener a partir de ello, en la tercera pregunta deben identificar cuando una función tiende a algún valor partiendo de la sustitución y finalizando con la notación de límite y luego la cuarta seria como un refuerzo de porque decimos que el límite es este valor cuando tiende a cierto valor dentro del plano cartesiano.

A5: Para crear el problema donde los estudiantes deben demostrar la existencia de un límite nosotros nos basamos en la grabación de la profesora en ejercicio, como ella demuestra límites, entonces nosotras concluimos que si ella lo hacía nosotras podemos plantear actividades similares, como la demostración de límites con la definición de épsilon delta.
Para apoyar a los estudiantes que tengan dificultades nosotras consideramos que la idoneidad interaccional estará presente en el desarrollo de toda la actividad, ya que, si bien es un trabajo autónomo, el docente debe estar a cargo de la realización de la actividad, debe estar dispuesto a contestar dudas que pueden existir y si no se alcanza a realizar la actividad o la corrección de la misma en una clase quedará pendiente para la clase siguiente.

A6: Consideramos necesaria la incorporación de la tecnología porque fomenta a los alumnos a que continúen reforzando el contenido por la novedad de utilizar un programa, además que es didáctico, entretenido y les permite a los estudiantes ver las representaciones de los límites, por ejemplo, el hacer zoom y ver que por más que se acerque no llegará a tocar el punto al cual tiende, así ellos se pueden dar cuenta de que se trata el límite de forma gráfica realizado y observado por ellos mismos por medio de la tecnología que en nuestra actividad se apoya en GeoGebra.

A5: Sumado a lo anterior el uso de la tecnología lo justificamos al observar los objetivos específicos presentes en la unidad de límite del programa del diferenciado de límite, derivadas e integrales del Mineduc en su OA2.

G4 (A7)
A7: Yo decidí apegarme a lo que el Mineduc propone porque quiero evaluar desde los criterios de idoneidad las herramientas que este nos entrega dentro del contexto de una clase virtual. A7: Dentro de los criterios de idoneidad que yo encontré o identifiqué fuertes en estas actividad propuesta fue el interaccional, en particular la interacción docente discente, porque el material permite en todo momento ir desarrollándolo en conjunto con la clase, a partir de las preguntas que se plantean se puede ver la manera en que el estudiante piensa, se puede asignar un trabajo en equipo para ver como ellos colaboran con sus compañeros, también no aparecen explícitamente los conceptos a estudiar por lo tanto el estudiante en conjunto con el docente puede practicar sus nociones de inferencia, sin embargo, en todo momento el docente debe trabajar en conjunto con el alumno. A7: Con respecto al tiempo de la clase yo considero que se puede hacer en un segmento de 60 minutos gran parte de las preguntas planteadas se pueden realizar cada 15 minutos en colaboración con los estudiantes. A7: Para valorar el aprendizaje de los estudiantes pienso escuchar las respuestas de los estudiantes esperando que ellos puedan identificar el trasfondo de las actividades, por ejemplo, en la pregunta 1, que los alumnos al realizar la actividad vayan encontrando los elementos de la sucesión y los conceptos estudiados. En cada pregunta se debe tener presente cuales son las respuestas esperadas para observar la progresión del alumno en estas actividades, así el docente puede ir monitoreando en cada momento de la clase como los estudiantes van adquiriendo estos objetivos de aprendizaje. A8: La actividad presentada podría ser utilizada en una clase previa a alguna evaluación, porque las preguntas que se sugieren abarcan varios conceptos de límites que se tendrían presentes dentro de una evaluación. A8: Con respecto a los conocimientos previos es necesario que los alumnos tengan varias nociones de sucesiones, ya que es muy importante para comprender límites, además los conceptos de funciones y los conocimientos básicos de los números racionales e irracionales. Los límites son un tema complejo que se ve en los planes electivos de los colegios, no en matemática común ya que son necesarias muchas habilidades y conocimientos para poder desarrollarlos. A8: Antes de esta actividad sería necesario que el docente realice clases teóricas con respecto a los contenidos de límites que se plantean en las preguntas de esta actividad, que está concebida desde sus inicios como una actividad de repaso y que no solamente monitoreará los conocimientos que adquirirá el alumno, sino que más bien los irá reforzando y al profesor le servirá para comprender cuál es la situación de aprendizaje de sus alumnos. Para implementarlo de forma virtual por la experiencia con la profesora de práctica les solicitaría a los alumnos que envíen sus actividades por correo antes de finalizar la clase y las utilizaría para monitorear los aprendizajes de los estudiantes.
G4 (A8)
A8: Yo modifique un poco la actividad, pero en aspectos mínimos, por ejemplo, cuando al alumno se le pide construir sucesiones convergentes o divergentes, yo prefiero que los alumnos lo realicen pictóricamente a través de GeoGebra, porque el OA g (Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación), no estaba presente en la actividad original que sugería el Mineduc. Además, yo agregué una situación inicial donde les enseñaría a que es GeoGebra, porque es necesario aprender a utilizar este programa y como se utiliza las herramientas básicas de este programa. A8: En la actividad 3 cambie la imagen de la actividad inicial de una recta a un plano cartesiano porque considero que los estudiantes se encuentran más familiarizados con este punto. A8: La actividad que yo diseñe la pretendo desarrollar de forma presencial, porque según creo las actividades que diseño el Mineduc las realizó antes de la pandemia, por esta razón preferí implementarlas tal y como fueron diseñadas. Pienso implementarlas en 4 clases, considerando 8 horas pedagógicas para su

implementación, ya que, considero que las horas que recomienda el Ministerio son muchas para lo cortas que son las actividades.

A8: con esta implementación busco desarrollar en los estudiantes una visión intuitiva del concepto de límite de funciones, pero que sean capaces de definir los conceptos de tendencia, convergencia y divergencia.

A8: Los criterios de idoneidad que pretendo favorecer con la actividad son los correspondientes a la faceta cognitiva, la interaccional y la epistémica. Según mi punto de vista la idoneidad epistémica es la más importante y no puede faltar en cualquier diseño educativo, las otras dos que destaqué anteriormente son necesarias, ya que la idea de límite y su concepto son algo difícil de aprender, por esta razón toda la actividad debe estar a una meta alcanzable por el alumno a través de las nociones previas que este tenga. Los demás criterios como el emocional o ecológico considero que eso debería ser tarea del profesor en acción y no del diseño, ya que se debe contextualizar a la situación a la que se deba enfrentar.

A8: Para valorar el aprendizaje de los estudiantes, como las actividades solicitadas son escritas, yo revisaría cada una de esas actividades buscando ver qué tipo de esquemas están trabajando los alumnos si existen errores de conceptualización.

A8: La actividad planteada está diseñada para ser implementada al inicio de la unidad porque primero veo la noción intuitiva, luego la definición informal y luego la definición formal que es la que utiliza épsilon delta.

A8: Para desarrollar esta actividad los estudiantes necesitan como conocimientos previos solamente las unidades anteriores, es decir, funciones.

A8: la incorporación de la tecnología se realiza primero porque se encuentra especificado en los objetivos específicos de la actividad, y a pesar de eso en la actividad original sugerida no se emplea la tecnología.

A8: enseño el incentro para que los estudiantes conozcan todas las las herramientas básicas del programa GeoGebra, pero no lo relaciono con el concepto de sucesión que busco desarrollar con las demás actividades.

G5 (A9 y A10)

A9: Nosotros con mi compañero al ver la primera pregunta consideramos que los ítems de la misma daban en el clavo con los objetivos que se pretendía abordar, luego agregamos uno que otro item en la segunda y tercera pregunta y la última la modificamos completa, ya que encontramos que estaba demasiado larga y quisimos se sea una situación con contexto que sea más real para los estudiantes, pero desde un punto de vista matemático. Pensamos desarrollar estas actividades de forma presencial ya que consideramos que las actividades estaban diseñadas de esa forma y en la virtualidad nos costaría mucho evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

A9: Notamos que había 5 criterios de idoneidad presentes, estos son: el epistémico, el mediacional, el cognitivo, el interaccional y el emocional.
Por medio de la actividad, se busca que el estudiante logre identificar la noción de límite y consideramos que nos faltó comentar que consideramos partir con una introducción previa, un juego para que los estudiantes comprendan y se motiven, este podría ser consultarles ¿Cuál es el número positivo distinto de cero más pequeño que conoces?, así los estudiantes pueden notar que existen infinitos números en un intervalo determinado, por ejemplo, entre cero y uno.

A10: Tal como lo mencionó mi compañero consideramos que en la actividad planteada existían 5 criterios, estando siempre presentes el epistémico y cognitivo, en ocasiones el emocional cuando se hace referencia al interés de los estudiantes, como se busca generar una idea intuitiva de un contenido nuevo, se busca captar el interés de los estudiantes a través del contexto, el tipo de preguntas y el tipo de interacciones, aqui está presente en la idoneidad interaccional buscando que comenten y debatan entre compañeros y frente a toda la clase.
Respecto a la modalidad la pensamos de forma presencial, creemos que también la actividad se puede adaptar a la virtualidad, en mi experiencia de práctica los estudiantes al finalizar la clase suben su actividad a la plataforma utilizada en la clase, esto se podría utilizar para valorizar el aprendizaje, aun así, en presencialidad

creemos que la interacción clase a clase y lo que ellos desarrollen de las actividades constituye una forma de valorizar su aprendizaje.

A10: dentro de los objetivos de aprendizaje planteados en la actividad propuesta en ningún momento se aborda un concepto formal de limite, de hecho el objetivo solo abarca un acercamiento intuitivo de modo que las actividades giran en torno a la intuición de límite, incluso antes de este, el concepto de sucesión, por esto consideramos que debería plantearse justo al inicio de la unidad de límites, si es que aun los conocimientos previos, por ejemplo lo que es sucesión no están claros se pueden reforzar y esto también está considerado dentro de la cantidad de tiempo por cada actividad ya que en esta época de pandemia existen grandes falencias de contenido dentro del aprendizaje de los estudiantes sobre todo en matemática por lo que es necesario abordar conocimientos previos y reforzarlos.

A10: los alumnos necesitan para esta actividad el conocimiento previo de sucesión, por lo que es necesario abordarlo y trabajarlo, considerando el termino general, el término enésimo y existen conceptos clave que para el docente pueden parecer obvios, pero para los estudiantes en ocasiones no lo es, por esto es necesario no utilizar tecnicismos que pueden confundir a los estudiantes. También hay que considerar que dependiendo del contexto donde se esté trabajando los estudiantes pueden presentar otras de dudas que sean necesarias abordar antes de llevar a cabo la realización de esta actividad.

A9: Con respecto a cómo apoyaríamos a los estudiantes, en la actividad con GeoGebra nosotros los llevamos a que logren trabajan ya sea en parejas o solos con el programa GeoGebra, lo que se convierte en un gran apoyo para que el docente logre mostrarles ciertas cosas a los estudiantes como el límite de una función en un punto. De las actividades que seleccionamos mantener de la propuesta son las que tienen imágenes, ya que consideramos que la forma gráfica aclara mejor los conceptos.

A9: Pensamos la actividad presencial, pero es posible adaptarla a forma virtual.